VARIABLES ALÉATOIRES

Soit une expérience aléatoire possédant un nombre fini d'issues. Son univers est l'ensemble Ω.

I / VARIABLES ALÉATOIRES

Définition : Une variable aléatoire sur Ω est une fonction de Ω vers $\mathbb{R}$ qui à chaque évènement associe un nombre réel.

Notations :

- Une variable aléatoire est généralement notée par une lettre majuscule $X, Y, Z, \ldots$
- L'évènement « X prend la valeur a » est noté $\{X = a\}$.
- L'évènement « X prend une valeur strictement inférieure à a » est noté $\{X < a\}$.

Exemple : On lance un dé non pipé à 6 faces et on associe à chaque face un gain G.

Issue	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Gain G	4 €	4 €	4 €	1 €	1 €	−5 €

La variable aléatoire G prend 3 valeurs : -5, 1 et 4.
L'évènement $\{G = 1\}$ est réalisé pour les issues 4 et 5. L'évènement $\{G < 2\}$ est réalisé pour les issues 4, 5 et 6.

II / LOI DE PROBABILITÉ D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE

On considère une variable aléatoire X définie sur un univers Ω. X prend les valeurs $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Définition : Définir la loi de probabilité de X, c'est associer à chaque valeur x_i (avec $1 \leq i \leq n$), la probabilité de l'évènement $\{X = x_i\}$, notée $p(X = x_i)$.

Exemple : À partir de l'exemple précédent, la loi de probabilité de G est donnée par le tableau ci-contre.

$$p(G = 4) = p(\{1\,;2;3\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Gain x_i (en €)	**-5**	**1**	**4**
$p(G = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

III / ESPÉRANCE, VARIANCE, ÉCART-TYPE

Soit une variable aléatoire X définie sur un univers Ω dont la loi de probabilité est donnée ci-contre.

$\boldsymbol{x_i}$ **(Valeurs de X)**	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	…	$\boldsymbol{x_n}$
$p(G = x_i)$	p_1	p_2	…	p_n

Définitions : On définit les trois nombres réels suivants :

- L'espérance de X : $E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n$.
  On peut interpréter l'espérance comme la valeur moyenne que l'on pourrait obtenir en répétant l'expérience aléatoire un très grand nombre de fois.

- La variance de X : $V(X) = p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 + \cdots + p_n(x_n - E(X))^2$.

- L'écart-type de X : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.
  L'écart-type permet de caractériser la dispersion des valeurs par rapport à l'espérance.

Jeu équitable : Supposons que Ω est l'ensemble des issues d'un jeu de hasard et que la variable aléatoire X définie sur Ω donne le gain du joueur. On dira que ce jeu est équitable si $E(X) = 0$.

Exemple : À partir de l'exemple précédent, on obtient que $E(G) = \frac{1}{6} \times (-5) + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{2} \times 4 = 1{,}5$. Ce jeu n'est donc pas équitable, du point de vue des mathématiques.

Changement de variable :

Il est parfois nécessaire de changer de variable afin de simplifier les calculs.

On utilise pour cela les propriétés suivantes :

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$
$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$
$$\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$$