FONCTION EXPONENTIELLE

I / INTRODUCTION DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

Propriété : Il existe une seule fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x)$ et telle que $f(0) = 1$.

Propriété : La fonction f définie dans la propriété précédente ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$.

Définition : Cette fonction est appelée fonction exponentielle et est notée (provisoirement) exp.

Conséquences : exp est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $exp'(x) = exp(x)$ $\quad exp(0) = 1.$ $\quad exp(x) \neq 0$

Propriété : Pour tout réel x, $\quad exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$

Propriétés : Pour tous réel x et y, pour tout entier relatif n

$$exp(x+y) = exp(x) \times exp(y) \qquad exp(x-y) = \frac{exp(x)}{exp(y)} \qquad exp(nx) = \left(exp(x)\right)^n$$

Notation : On note $exp(1) = e$. e est un nombre irrationnel qui vaut environ 2,718.

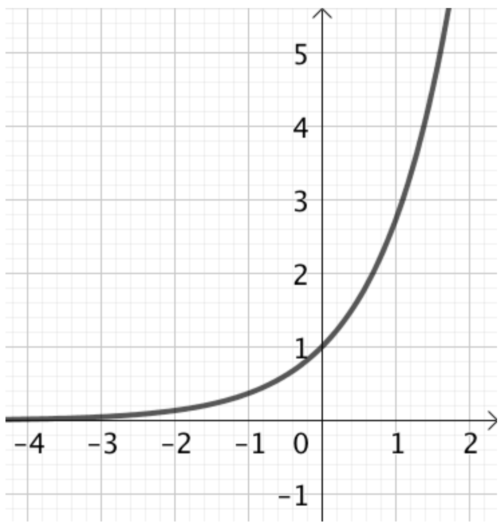
Conséquence : Pour tout entier relatif n : $exp(n) = exp(n \times 1) = \left(exp(1)\right)^n = e^n$

Par extension, on convient de noter que $\boldsymbol{exp(x) = e^x}$

Avec cette notation, les propriétés précédentes s'écrivent ainsi :

$$(e^x)' = e^x \qquad e^0 = 1 \qquad e^x \neq 0 \qquad e^{-x} = \frac{1}{e^x} \qquad e^{x+y} = e^x e^y \qquad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \qquad e^{nx} = (e^x)^n$$

Propriété : a et b étant deux nombres réels, la fonction f définie tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = e^{ax+b}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = ae^{ax+b}$



II / ÉTUDE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

Propriété : Pour tout réel x, $e^x > 0$

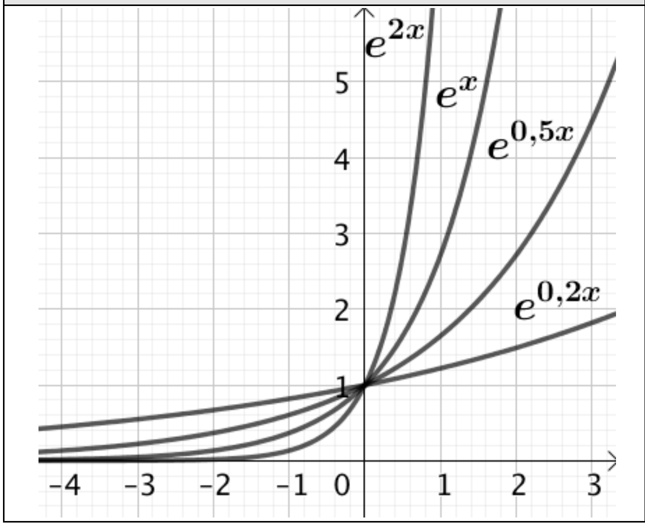
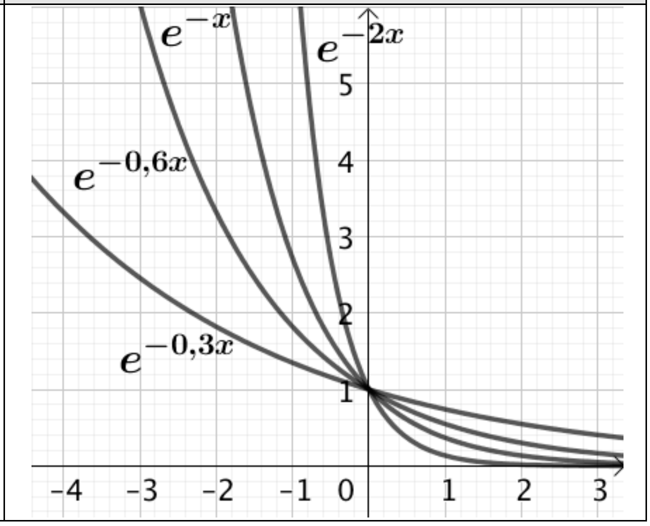
Propriété : La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Propriété :
On définit une famille de fonction f_k par $f_k(x) = e^{kx}$ avec $k \in \mathbb{R}^*$.

Toutes les fonctions f_k sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. $f_k'(x) = ke^{kx}$

- Elles sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}$ si $k > 0$.
- Elles sont strictement décroissantes sur $\mathbb{R}$ si $k < 0$.
- Les courbes représentatives des fonctions f_k passent par le point de coordonnées (0 ; 1).

Exemples :

$f_k : x \to e^{kx}, k > 0$	$g_k : x \to e^{-kx}, k > 0$
	

Remarque : les courbes représentatives des fonctions f_k passent toutes par le point de coordonnées (0 ; 1).

III / RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS ET D'INÉQUATIONS

Propriété 9 : Pour tous réels a et b :

- $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$
- $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$
- $e^a > e^b \Leftrightarrow a > b$

Exemple : Résolution de l'équation $e^{3x+9} = 1$

$$e^{3x+9} = 1 \Leftrightarrow e^{3x+9} = e^0 \Leftrightarrow 3x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = -3$$