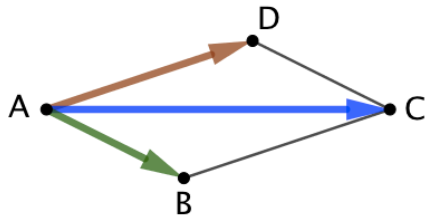
GÉOMÉTRIE VECTORIELLE

0 / RAPPELS SECONDE



- **Relation de Chasles** : Pour tous points E, F et G, $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{EG}$
- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ si et seulement si ABCD est un parallélogramme.
- Pour tous points A, B et C, si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ alors $B = C$.
- Pour tous points A et B, $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ $\quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$.
- M est le **milieu** du segment [AB] si et seulement si $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ ou $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ ou $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
- Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ si $\vec{u} + \vec{w} = \vec{v} + \vec{w}$ alors $\vec{u} = \vec{v}$

- Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, pour tous réels k et l

$$k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v} \qquad (k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u} \qquad k(l\vec{u}) = (k \times l)\vec{u}$$

- Pour tout vecteur $\vec{u}$ et pour tour réel k, $k\vec{u} = \vec{0}$ si et seulement si $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$
- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** s'il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$ ou un réel k' tel que $\vec{u} = k'\vec{v}$.
- Trois points sont alignés ssi on peut construire avec eux deux vecteurs non nuls et colinéaires.
- Deux droites sont parallèles ssi à partir de deux points placés sur chacune des droites, on peut former deux vecteurs colinéaires.

- Soient les vecteurs $\vec{u}(x; y)$, $\vec{v}(x'; y')$, un réel k.
  Coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$: $(x + x'; y + y')$
  Coordonnées de $k\vec{u}$: $(kx; ky)$
  Coordonnées de $-\vec{u}$: $(-x; -y)$

- Soient les points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.
  Coordonnées de $\overrightarrow{AB}$: $(x_B - x_A; y_B - y_A)$
  $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
  Coordonnées du milieu de $[AB]$: $\left(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}\right)$

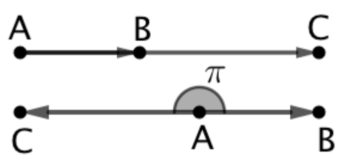
- Deux vecteurs sont égaux si et seulement s'ils possèdent les mêmes coordonnées.
- Soient deux vecteurs $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$. L'expression $xy' - yx'$ est le déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
- Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

I / PRODUIT SCALAIRE

Définition : Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ avec $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
Le produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ est le nombre réel $\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$.

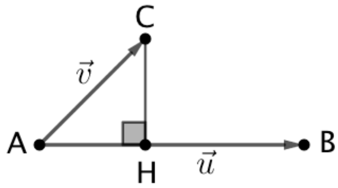
Conséquence : Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Propriétés :



- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de même sens, $\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \times AC$
- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de sens contraire, $\vec{u} \cdot \vec{v} = -AB \times AC$

Propriétés : Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) . Alors :



- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires et de même sens, $\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \times AH$
- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires et de sens contraire, $\vec{u} \cdot \vec{v} = -AB \times AH$
- On peut résumer les deux cas à : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$

Définition : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux si et seulement si les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

Propriété : Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

Expression analytique du produit scalaire : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$

Propriétés : Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \qquad \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \qquad (\lambda\vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

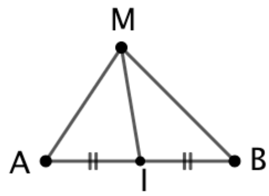
Propriétés : Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$,

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 \qquad \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \qquad (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$$

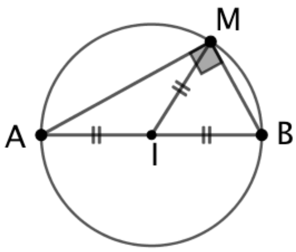
Théorème de Pythagore : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$.

II / APPLICATIONS DU PRODUIT SCALAIRE AU CERCLE ET AU TRIANGLE



Propriété : Étant donnés trois points A, B et I le milieu de $[AB]$, pour tout point M,

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \left\|\overrightarrow{MI}\right\|^2 - \frac{1}{4}\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2$$



Propriété : Étant donnés deux points distincts A et B

L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.

Propriété : Une équation cartésienne du cercle de centre A de coordonnées $(x_A; y_A)$ et de rayon r est

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = r^2.$$

Propriété d'Al-Kashi (Généralisation du théorème de Pythagore) :
Dans un triangle ABC avec les notations du schéma de droite,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$