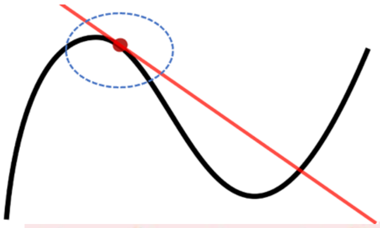
DÉRIVATION ET FONCTIONS DÉRIVÉES

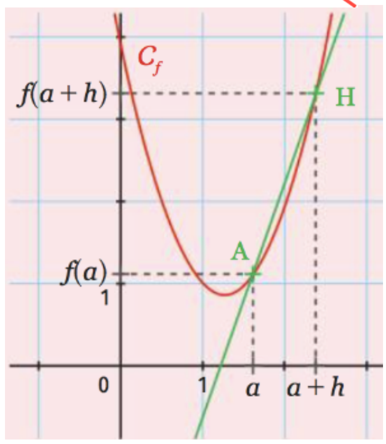
Dans ce chapitre f est une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et on notre $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan. $a \in I$. A est le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a.

Rappel : l'équation cartésienne réduite d'une droite est de la forme $y = ax + b$, où a est la pente (coefficient directeur) de la droite et b est son ordonnée à l'origine.



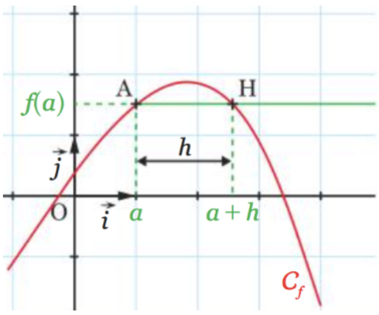
Notion de tangente à une courbe : La tangente à une courbe en un de ses points est une droite qui « touche » la courbe au plus près au voisinage de ce point et sans couper la courbe une seconde fois.

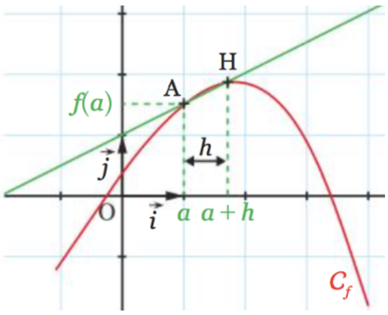
I / TAUX DE VARIATION, TANGENTE À UNE COURBE, NOMBRE DÉRIVÉ



Définition : Soient $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $a + h \in \mathbb{R}$, et H le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse $a + h$.
Le taux de variation de f entre a et $a + h$ est $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$
Propriété : Ce taux de variation est le coefficient directeur de la droite (AH).

En faisant tendre h vers 0, H tend à se confondre avec A. On obtient une droite limite que l'on appelle la tangente à la courbe représentative de f au point A.





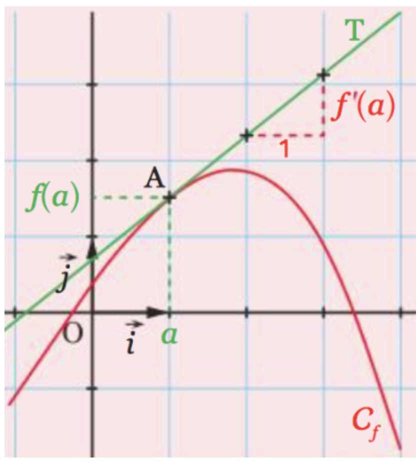
En faisant tendre h vers 0, le coefficient directeur de la droite (AH), $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers une valeur limite qui est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f en A.

Définition : On dit que f est dérivable en a si $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers un nombre réel quand h prend des valeurs de plus en plus proches de 0. Ce nombre est appelé nombre dérivé de f en a et est noté $f'(a)$.

Exemple : $f(x) = x^2$. On recherche le nombre dérivé de f en 2.

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{(2+h)^2-2^2}{h} = \frac{4+4h+h^2-4}{h} = \frac{4h-h^2}{h} = 4-h$$

Quand h tend vers 0, $4 - h$ tend vers 4. Donc f est dérivable en 2 et $f'(2) = 4$



Remarque : Au voisinage de A, la tangente à la courbe en A se confond presque avec la courbe de f. On dit qu'au voisinage de A, la tangente en A est une bonne approximation de la courbe.

Propriété : Lorsque f est dérivable en a, l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Exemple : $f(x) = x^2$. On a sait que $f'(2) = 4$. Les coordonnées du point A sont (2 ; 4). Donc l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A est $y = 4(x-2) + 4$, c'est-à-dire $y = 4x - 4$.
Remarque : Si $f'(a) = 0$ alors la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

II / FONCTIONS DÉRIVÉES

Définitions :

- La fonction f est dérivable sur l'intervalle I ssi f est dérivable en tout réel x de I.
- On appelle fonction dérivée de f la fonction qui à tout réel x de I, associe le réel $f'(x)$. On la note f'.

Exemple : On veut déterminer la fonction dérivée de la fonction carrée. $f(x) = x^2$. On calcule l'expression du taux de variation de f en x :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h} = \frac{2hx-h^2}{h} = 2x-h$$

La limite de $2x-h$ quand h tend vers 0 est 2x. Donc f est dérivable en x et $f'(x) = 2x$

Fonctions dérivées des fonctions usuelles

f	Ensemble de définition de f	f'	Ensemble de définition de f'
$f(x) = k$ avec $k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = mx + p$ avec $m, p \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = m$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$

III / OPERATIONS SUR LES FONCTIONS DÉRIVÉES

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I.

La fonction	**Notée**	**est dérivable sur I et …**
$x \to u(x) + v(x)$	$u + v$	$(u+v)' = u' + v'$
$x \to ku(x)$ avec $k \in \mathbb{R}$	ku	$(ku)' = ku'$
$x \to u(x)v(x)$	uv	$(uv)' = u'v + uv'$
$x \to \left(u(x)\right)^2$	u^2	$(u^2)' = 2uu'$
$x \to \left(u(x)\right)^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	u^n	$(u^n)' = nu^{n-1}u'$
$x \to \frac{1}{u(x)}$ avec $u(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$	$\frac{1}{u}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
$x \to \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $v(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$	$\frac{u}{v}$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
$x \to \sqrt{u(x)}$ avec $u(x) > 0$ pour tout $x \in I$	$\sqrt{u}$	$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

Propriété admise : Toutes les fonctions polynomiales sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

Propriété :

Soient a et b deux nombres réels avec $a \neq 0$.
Soient I et J deux l'intervalles tels que pour tout $x \in I, ax + b \in J$.
Soit g une fonction définie et dérivable sur un intervalle J.
Soit f une fonction définie sur I par $f(x) = g(ax + b)$.

Alors f est dérivable sur I
$f'(x) = ag'(ax + b)$

Exemple : Soit la fonction f définie sur $I = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$ par $f(x) = \sqrt{2x-1}$. On considère g la fonction racine carré définie sur $J = [0; +\infty[$. On observe que $f(x) = g(2x-1)$. Par ailleurs si $x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$ alors $2x - 1 \in [0; +\infty[$. g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Par conséquent f est dérivable sur I et $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$.

IV / SIGNE DE LA DÉRIVÉE ET SENS DE VARIATION

Propriétés admises : Soit la fonction f est dérivable sur l'intervalle I.

- f est croissante sur I si et seulement si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.
- f est décroissante sur I si et seulement si $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$.
- f est constante sur I si et seulement si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$.

Remarque : Si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$ et ne s'annule que pour un nombre fini de valeurs de x, on en conclut que f est strictement croissante sur I. Même type de remarque si $f'(x) \leq 0$.

V / EXTREMUM LOCAL D'UNE FONCTION

Définitions : Soit un réel $c \in I$.

- $f(c)$ est un minimum local de f s'il existe un intervalle ouvert $J \subset I$ tel que $c \in J$ et tel que pour tout $x \in J, f(x) \geq f(c)$.
- $f(c)$ est un maximum local de f s'il existe un intervalle ouvert $J \subset I$ tel que $c \in J$ et tel que pour tout $x \in J, f(x) \leq f(c)$.

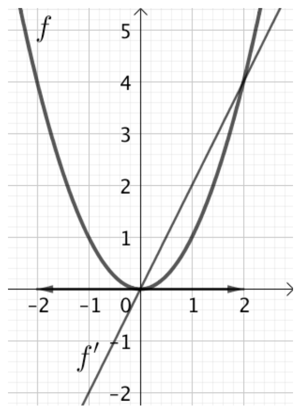
Vocabulaire : on parle d'extremum local pour désigner un minimum ou un maximum local.

Propriété : Soit la fonction f est dérivable sur l'intervalle I et un réel $c \in I$.
Si $f(c)$ est un extremum local de f alors $f'(c) = 0$.

La réciproque est fausse. la dérivée de la fonction cube s'annule en 0 mais elle ne possède pas d'extremum.

Propriété : Soit la fonction f est dérivable sur l'intervalle I et un réel $c \in I$.
Si $f'(c) = 0$ et si f' change de signe au voisinage de c alors $f(c)$ est un extremum local de f.

Exemple : la fonction carré définie par $f(x) = x^2$. Elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2x$. $f'(0) = 0$ et f' change de signe en 0. La fonction carré a un minimum en 0.La tangente au point $(0; 0)$ est horizontale.



x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

VI / TABLEAU DE VARIATION D'UNE FONCTION

Le tableau de variation d'une fonction regroupe toutes les informations connues sur la fonction :

1. Domaine de définition
2. Parité, signe de la fonction (si facile à déterminer)
3. Valeurs de x qui annulent où la dérivée s'annule
4. Sens de variation de la fonction
5. Limites si possible