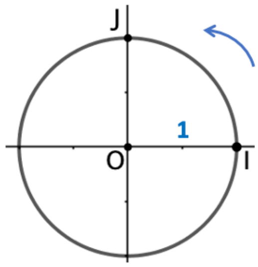
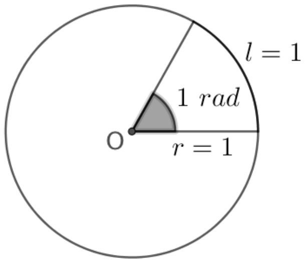
TRIGONOMÉTRIE

I / LE RADIAN



Définition : Dans un repère orthonormé $(0; I; J)$, le cercle de centre O et de rayon 1, parcouru de I vers J, c'est-à-dire dans le sens opposé des aiguilles d'une montre, est appelé le cercle trigonométrique.



Définition : On considère un cercle de centre O et de rayon $r = 1$. Le radian (symbole rad) est la mesure d'un angle au centre qui intercepte sur le cercle un arc de longueur 1.

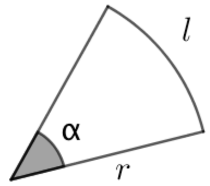
Degré	30°	45°	60°	90°	180°	360°
Radian	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

Conversion de radian en degré

Radian	π	α
Degré	180	$\frac{180 \times \alpha}{\pi}$

Conversion de degré en radian

Degré	180	α
Radian	π	$\frac{\pi \times \alpha}{180}$

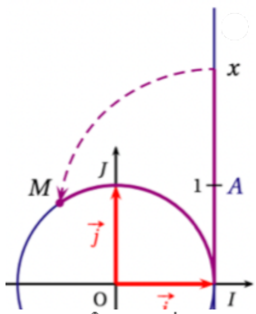


Propriété : La longueur d'un arc de cercle de rayon r et d'angle au centre de mesure α exprimée en degrés est :

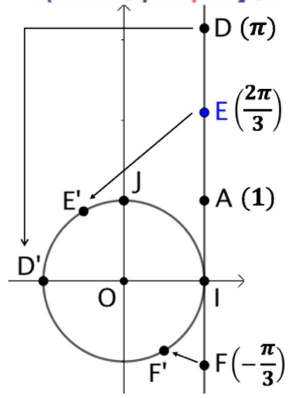
$$l = \frac{\pi r \alpha}{180} \quad \text{avec} \quad 0 \leq \alpha \leq 360°$$

Propriété : La longueur d'un arc de cercle de rayon r et d'angle au centre de mesure θ exprimée en radian est $\ l = r\theta\ $ avec $\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$.

II / ENROULEMENT DE LA DROITE NUMÉRIQUE



Définition : Soit le point A de coordonnées $(1; 1)$ et la droite (IA), dite droite des réels, munie du repère (I, A). On « enroule » cette droite autour du cercle trigonométrique. Ainsi à tout nombre réel x sur la droite (IA) correspond un point M du cercle que l'on appelle point image du nombre réel x.



Exemples :

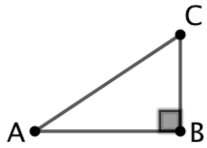
- Lors de l'enroulement, le point E devient le point E'. La mesure de l'angle $\widehat{IOE'}$ est $\frac{2\pi}{3}$ rad. L'abscisse du point E est donc $\frac{2\pi}{3}$.
- De même, l'abscisse du point D est π et celle de F est $-\frac{\pi}{3}$.

Propriété : Si x et y sont des nombres réels tels $x - y = k \times 2\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$, alors x et y ont le même point image sur le cercle trigonométrique.

Conséquence : Si M est le point du cercle trigonométrique qui est l'image du nombre réel x, alors M est aussi l'image de tous nombres réels $x + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Exemple : Les nombres réels π et 7π ont le même point image car $\ 7\pi = \pi + 3 \times 2\pi$.

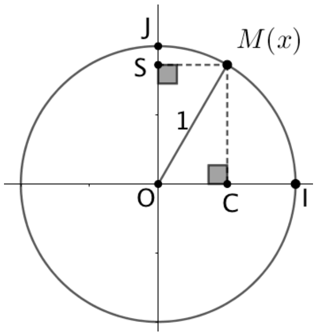
III/ COSINUS ET SINUS D'UN NOMBRE RÉEL



Rappel :

$$\cos\widehat{BAC} = \frac{AB}{AC} \qquad \sin\widehat{BAC} = \frac{BC}{AC} \qquad \text{pour} \quad 0 \leq \widehat{BAC} \leq \frac{\pi}{2}$$

Définitions : Dans un repère $O, I, J)$, on considère le cercle trigonométrique de centre O. M est le point du cercle image d'un nombre réel x.



- Le cosinus de x, noté $\cos x$, est l'abscisse du point M.
- Le cosinus de x, noté $\sin x$, est l'ordonnée du point M.

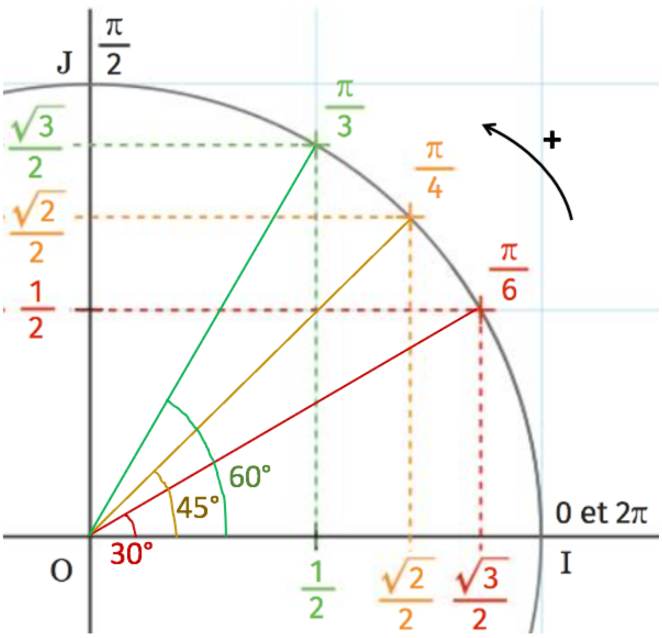
Si $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, on retrouve bien les définitions du cosinus et du sinus données en classe de seconde :

$$\cos x = \frac{OC}{AM} = OC \qquad \sin x = \frac{CM}{OM} = CM = OS$$

Propriétés : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad -1 \leq \cos x \leq 1 \qquad -1 \leq \sin x \leq 1 \qquad \cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Tableau de valeurs remarquables :

Angle	0°	30°	45°	60°	90°	180°
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0



IV / FONCTIONS COSINUS ET SINUS

Définitions :

- La fonction cosinus est la fonction qui à tout nombre réel x associe $\cos x$.
- La fonction sinus est la fonction qui à tout nombre réel x associe $\sin x$.

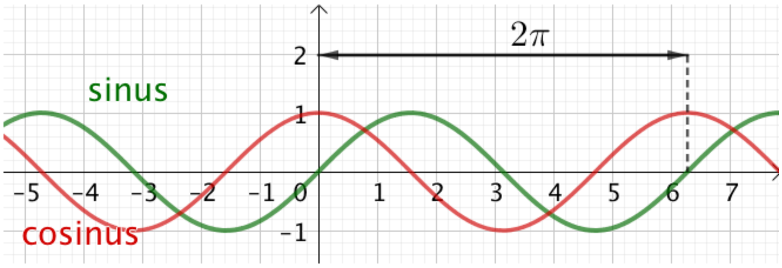
Propriétés :

- La fonction cosinus est paire : Pour tout $x \in \mathbb{R}, \cos(-x) = \cos x$.
- La fonction sinus est impaire : Pour tout $x \in \mathbb{R}, \sin(-x) = -\sin x$.

Propriété : Les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ $\sin(x + 2\pi) = \sin x$

Courbes représentatives : Les courbes représentatives des fonctions cosinus et sinus sont des sinusoïdes.

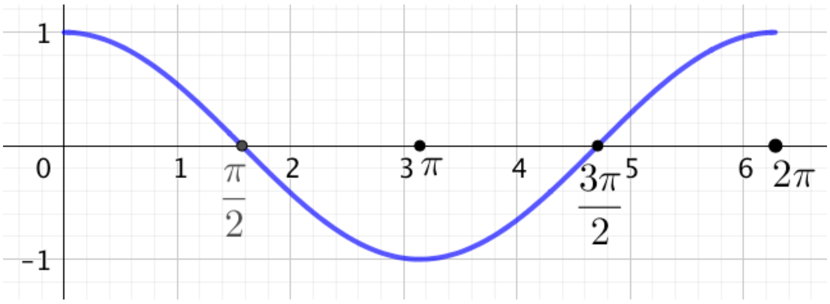


La courbe représentative de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

La courbe représentative de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Sens de variation de la fonction cosinus :

- Décroissante sur $[0; \pi]$
- Croissante sur $[\pi; 2\pi]$
- Elle s'annule en $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$



Sens de variation de la fonction sinus :

- Croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$
- Décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$
- Croissante sur $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$
- Elle s'annule en $0, \pi$ et 2π