

SUITES

I / GÉNÉRALITÉS

Définition : Une suite numérique u est une fonction de \mathbb{N} dans \mathbb{R} qui à un entier naturel n associe le nombre réel $u(n)$.

Notation : On préfère la notation u_n au lieu de $u(n)$. La suite est u notée (u_n) .
 u_n est le terme général de la suite (u_n) de rang n .

Exemple : La suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 2n + 1$
 $u_0 = 2 \times 0 + 1 = 1$ $u_1 = 2 \times 1 + 1 = 3$ $u_2 = 2 \times 2 + 1 = 5$
On observe que (u_n) est la suite de tous les nombres impairs.

Remarque : Très souvent le premier terme de la suite est u_0 ou u_1 . Mais il est possible de faire démarrer la suite à partir d'un rang supérieur.

On peut définir une suite (u_n) de manière explicite ou par une relation de récurrence.

Définition explicite : Une suite (u_n) est définie explicitement lorsque l'on peut calculer n'importe quel terme de la suite directement en fonction de n . On donne alors l'expression du terme général u_n en fonction de n .

Exemple : Voir l'exemple précédent

Définition par récurrence : Une suite est (u_n) définie par récurrence lorsqu'elle est définie par la donnée de son premier terme et d'une relation qui permet de calculer un terme à partir du terme précédent. On donne alors l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n . Cette relation est appelée relation de récurrence.

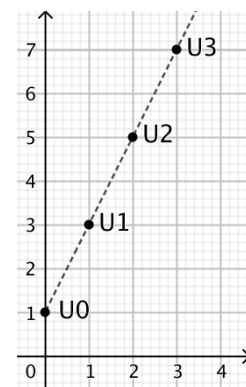
Exemples : $v_{n+1} = 2v_n + 1$ et $v_0 = 0,5$.
 $v_1 = 2 \times v_0 + 1 = 2 \times 0,5 + 1 = 2$ $v_2 = 2 \times v_1 + 1 = 2 \times 2 + 1 = 5$
 $w_{n+1} = 2w_n + 1$ et $w_0 = 1$.
 $w_1 = 2 \times w_0 + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3$ $w_2 = 2 \times w_1 + 1 = 2 \times 3 + 1 = 7$

Représentation graphique :

On utilise un repère à deux axes. Sur l'axe des abscisses, on place les valeurs prises par le rang n et sur l'axe des ordonnées les valeurs prises par u_n .

$$u_n = 2n + 1$$

On remarque que les points U_n de coordonnées (n, u_n) sont situés sur la droite affine d'équation $y = 2x + 1$



II / SENS DE VARIATION D'UNE SUITE

Définition : Soit une suite (u_n) et un entier naturel p .

- (u_n) est croissante ssi pour tout entier naturel $n \geq p$, $u_{n+1} \geq u_n$.
- (u_n) est décroissante ssi pour tout entier naturel $n \geq p$, $u_{n+1} \leq u_n$.
- (u_n) est constante ssi pour tout entier naturel $n \geq p$, $u_{n+1} = u_n$.

Vocabulaire : une suite croissante, décroissante ou constante est appelée suite monotone.

Méthodes pour étudier le sens de variation :

1. On étudie le signe de l'expression $u_{n+1} - u_n$ après l'avoir simplifiée.
2. Si les termes de la fonction sont positifs, on compare l'expression $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1.

$$\text{Si } \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \text{ alors la suite est croissante} \qquad \text{Si } \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \text{ alors la suite est décroissante.}$$

III / SUITE ARITHMÉTIQUE

Dans toute la suite du cours, on considère une suite (u_n) de premier terme u_0 .

Définition par récurrence : (u_n) est arithmétique ssi la différence entre deux termes consécutifs est constante, c'est-à-dire s'il existe un nombre réel r tel que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + r$. Le nombre r est appelé raison de la suite (u_n) .

Exemple : la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + 3$. (u_n) est arithmétique de raison 3.

Propriété : Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r , alors pour tous entiers naturels n et p ,

$$u_n = u_p + (n - p)r$$

Conséquence (définition explicite) : La suite arithmétique (u_n) de raison r et de premier terme u_0 est définie pour tout entier naturel n par : $u_n = u_0 + nr$.

Attention : Si (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_1 et de raison r , sa définition explicite est pour tout entier n par : $u_n = u_1 + (n - 1)r$

Propriété : pour tout entier n non nul $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Propriété : $u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = n \frac{u_0 + u_{n-1}}{2}$ $u_1 + u_2 + \dots + u_n = n \frac{u_1 + u_n}{2}$

Pour retenir cette formule : la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique est égale à n fois la moyenne arithmétique de u_0 et u_{n-1} .

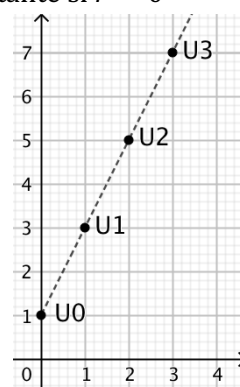
La formule avec $n+1$ termes : $u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n+1) \frac{u_0 + u_n}{2}$

Pour retenir cette formule : la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique est égale à n fois la moyenne arithmétique du premier terme et du dernier terme.

Sens de variation : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r ,

(u_n) est croissante si $r > 0$ (u_n) est décroissante si $r < 0$ (u_n) est constante si $r = 0$

Propriété : La représentation graphique d'une suite arithmétique est un nuage de points alignés. On dit que les termes d'une suite arithmétique suivent une progression linéaire.



IV / SUITE GÉOMÉTRIQUE

Définition par récurrence : (u_n) est géométrique ssi le rapport entre deux termes consécutifs est constant, c'est-à-dire s'il existe un réel non nul q tel que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = q \times u_n$.
Le nombre q est appelé raison de la suite (u_n) .

Exemple : la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 4u_n$. (u_n) est géométrique de raison 4.

Propriété : Si (u_n) est une suite géométrique de raison q alors pour tous entiers naturels n et p ,

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

Conséquence (définition explicite) : La suite géométrique (u_n) de raison q et de premier terme u_0 est définie pour tout entier naturel n par $u_n = u_0 \times q^n$

Propriété : Pour entier naturel n non nul et pour tout réel $q \neq 1$ $1 + q + q^2 \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

Propriété : Si (u_n) est une suite géométrique de raison $q \neq 1$ alors

$$u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = u_0 \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Pour retenir cette formule : la somme des n premiers termes d'une suite géométrique est égale au produit du premier terme par la somme des n premières puissances de la raison.

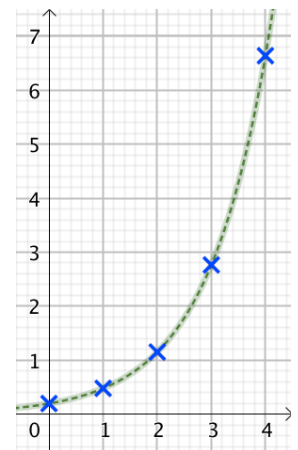
Signe d'une suite géométrique : Le signe de tous les termes d'une suite géométrique de raison positive est constant. Autrement dit : si la raison est positive, u_n est du même signe que u_0 .

Sens de variation : Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q > 0$ avec $u_0 > 0$

(u_n) est croissante si $q > 1$ (u_n) est décroissante si $0 < q < 1$ (u_n) est constante si $q = 1$

Propriétés :

- Si (u_n) est une suite géométrique de raison $q > 1$ alors le nuage des points de coordonnées (n, u_n) est sur une courbe exponentielle croissante.
- Si (u_n) est une suite géométrique de raison $0 < q < 1$ alors le nuage des points de coordonnées (n, u_n) est sur une courbe exponentielle décroissante.



V / LIMITE D'UNE SUITE

Exemple n°1 : $u_n = 3n + 1$

Soit A un nombre réel très grand. Il est toujours possible de trouver un rang p tel que pour tout $n > p$, $u_n > A$.

Il suffit de prendre pour p le premier entier naturel supérieur à $\frac{A-1}{3}$. On dira que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$

Exemple n°2 : $u_n = 9 \times 0,7^n$

Soit A un nombre réel très proche de 0. Il est toujours possible de trouver un rang p tel que pour tout $n > p$,

$u_n < A$. On peut trouver la valeur de p avec une calculatrice. On dira que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

Exemple n°3 : $u_n = (-1)^n$

On observe que si n est pair, $u_n = 1$ et que si n est impair, $u_n = -1$. Cette suite ne possède pas de limite.