FONCTIONS DU SECOND DEGRÉ, ÉQUATIONS

I / GÉNÉRALITÉS

Dans tout ce chapitre, sauf avis contraire, a, b et c sont trois nombres réels avec $a \neq 0$.

Définition : On appelle équation du second degré à une inconnue toute équation qui peut s'écrire sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$.

Résoudre une équation consiste à trouver, s'il elles existent, les valeurs de x telles que $ax^2 + bx + c = 0$.

Vocabulaire :

- L'expression $ax^2 + bx + c$ s'appelle un trinôme du second degré.
- Les racines de $ax^2 + bx + c$ sont les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

Propriété : Tout trinôme du second degré possède une forme canonique.

$$x^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

Définition : L'expression $b^2 - 4ac$ est appelé discriminant de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$. On le note Δ.

II / RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

Propriété : Soit l'équation $ax^2 + bx + c = 0$. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta = 0$, l'équation a une solution double :

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

- Si $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution

Propriété : Factorisation du trinôme $ax^2 + bx + c$

- Si $\Delta > 0$, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, où x_1 et x_2 sont les racines du trinôme.
- Si $\Delta = 0$, $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$ où x_0 est la racine double du trinôme.
- Si $\Delta < 0$, le trinôme n'est pas factorisable.

Propriété : Soient x_1 et x_2 les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$. Alors :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Propriété : Soient deux réels x_1 et x_2. Posons $S = x_1 + x_2$ et $P = x_1 x_2$. Alors x_1 et x_2 sont les solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$.

III / SIGNE D'UNE FONCTION POLYNOME DU SECOND DEGRÉ

On considère la fonction f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$

Signe de $\boldsymbol{f(x)}$ quand $\Delta > 0$ $\quad f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x - x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x - x_1)(x - x_2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$a(x - x_1)(x - x_2)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

On dira que $f(x)$ est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe de $-a$ entre les racines.

Signe de $\boldsymbol{f(x)}$ quand $\Delta = 0$ $\quad f(x) = a(x - x_0)^2 \quad$ alors $\quad f(x)$ est du signe de a.

Signe de $\boldsymbol{f(x)}$ quand $\Delta < 0$

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

$\Delta < 0$ donc $-\dfrac{\Delta}{4a^2} > 0$ et l'expression entre les crochets est positive. Alors $f(x)$ est du signe de a.

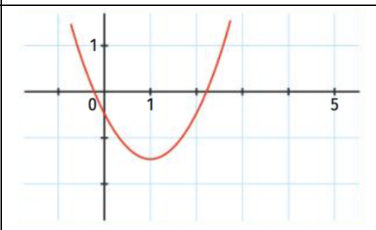
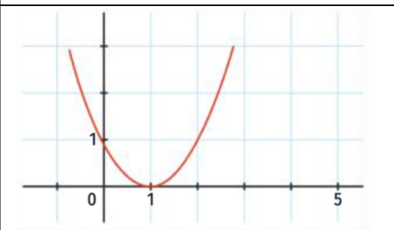
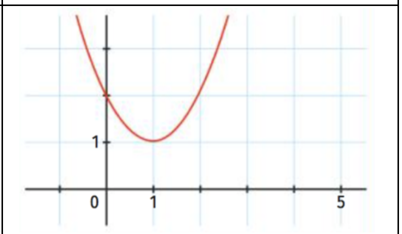
IV / INTERPRÉTATION GRAPHIQUE

Soit la fonction polynôme du second degré f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$. La courbe représentative de f est une parabole.

- Si $\Delta > 0$, la parabole a deux points d'intersection avec l'axe des abscisses en x_1 et x_2.
- Si $\Delta = 0$, la parabole a un seul point d'intersection avec l'axe des abscisses en x_0.
- Si $\Delta < 0$, la parabole n'a pas de point d'intersection avec l'axe des abscisses.

f possède un extremum pour $x = -\frac{b}{2a}$ qui est un minimum si $a > 0$ et un maximum si $a < 0$.

Position de la parabole selon le signe de $\boldsymbol{a}$ et de Δ :

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$a > 0$			
$a < 0$