

PROBABILITÉS

1) MODÉLISER UNE EXPÉRIENCE ALÉATOIRE

Définitions :

- Une expérience aléatoire est une expérience dans laquelle intervient le hasard : on ne peut pas en prévoir le résultat à l'avance.
- Les résultats possibles d'une expérience aléatoire sont appelés des issues.

Exemples : On lance une pièce de monnaie et on observe la face du dessus. Il y a deux issues : « pile » ou « face ». On ne peut pas savoir à l'avance laquelle des deux on va obtenir.

Définitions :

- Selon l'issue obtenue lors d'une expérience aléatoire, un évènement peut être réalisé ou non.
- Un évènement est un ensemble d'issues. On peut décrire un évènement par une phrase ou en donnant la liste des issues qui le réalisent.

Exemple : On lance un dé à 6 faces et on observe la face du dessus. Il y a 6 issues : 1, 2, 3, 4, 5 ou 6.

On se pose la question suivante : « le résultat obtenu est-il pair ? » On parle alors de l'évènement « Obtenir un résultat pair », c'est-à-dire « Obtenir 2, 3 ou 6 ».

Si on obtient l'une des issues 2, 4 ou 6, on dit que l'évènement est réalisé. Si on obtient l'une des issues 1, 3 ou 5, on dit que l'évènement n'est pas réalisé.

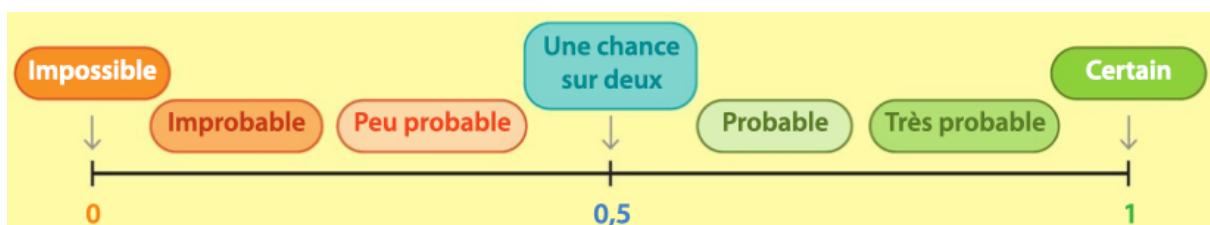
Définition : Si un évènement n'est réalisé que pour une seule issue, on dit que c'est un évènement élémentaire.

Exemple : On reprend l'exemple précédent. L'évènement « Obtenir un 6 » est un évènement élémentaire. L'évènement « Obtenir un résultat pair » n'est pas un évènement élémentaire puisqu'il est réalisé pour 3 issues : 2, 4 et 6.

2) PROBABILITÉ D'UN ÉVÈNEMENT

Définition : Modéliser une expérience aléatoire, c'est associer une probabilité à chaque issue.

- Une probabilité est un nombre compris entre 0 et 1.
- Une probabilité peut s'exprimer par un nombre décimal, une fraction ou un pourcentage.
- Plus une issue a de chances de se réaliser, plus sa probabilité est proche de 1.
- Moins une issue a de chances de se réaliser, plus sa probabilité est proche de 0.



Exemple : On reprend l'exemple de la pièce de monnaie. La probabilité de l'issue « PILE » est égale à $\frac{1}{2}$ ou 0,5 ou 50%. La probabilité de l'issue « FACE » est égale à $\frac{1}{2}$ ou 0,5 ou 50%.

La somme des probabilités de ces deux issues est : $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

Définition : Si toutes les issues d'une expérience aléatoire ont la même probabilité, on dit qu'elles sont équiprobables.

Exemples : Le lancer d'un dé non pipé, d'une pièce équilibrée, le loto.

Définition : Soit un nombre entier positif n . Si une expérience aléatoire est constituée de n issues équiprobables, la probabilité de chaque issue est égale à $\frac{1}{n}$.

Exemple : Lorsqu'on lance un dé non pipé, l'expérience aléatoire se compose de 6 issues équiprobables. Chaque issue a donc une probabilité égale à $\frac{1}{6}$.

Définition : La probabilité d'un évènement est la somme des probabilités des issues qui réalisent cet évènement.

Dans une expérience aléatoire où toutes les issues sont équiprobables, la probabilité d'un évènement A , notée $P(A)$, vaut :

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'issues qui réalisent l'évènement } A}{\text{nombre total d'issues}}$$



Exemple : On lance un dé non pipé à 6 faces numérotées de 1 à 6. On considère l'évènement « obtenir un multiple de 3 ». Si on obtient l'issue 3 ou 6, cet évènement est réalisé. Si on obtient l'issue 1, 2, 4 ou 5, cet évènement n'est pas réalisé. Comme chaque issue a une probabilité égale à $\frac{1}{6}$, on en déduit que la probabilité de

l'évènement est $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Propriétés :

- La probabilité d'un évènement impossible est 0.
- La probabilité d'un évènement certain est 1.
- La probabilité d'un évènement est comprise entre 0 et 1.
- Plus la probabilité d'un évènement est proche de 1, plus celui-ci a « de chances » de se réaliser.

Propriété : Dans une expérience où toutes les issues sont équiprobables, la probabilité d'un évènement A , notée $p(A)$, est égale à $\frac{\text{Nombre d'issues qui réalisent } A}{\text{Nombre total d'issues}}$.

Exemple : On lance un dé non pipé à 6 faces numérotées de 1 à 6. On considère l'évènement A « obtenir un nombre plus petit ou égal à 4 ». Les issues qui réalisent A sont : 1, 2, 3 et 4, pour un total de 6 issues possibles.

Le dé est équilibré donc les issues sont équiprobables. Conclusion : la probabilité de A est $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

3) ÉVÈNEMENT CONTRAIRE

Définitions :

- Un évènement impossible est un évènement qui ne peut jamais se réaliser quel que soit le résultat de l'expérience aléatoire.
- Un évènement certain est un évènement qui se réalise toujours quel que soit le résultat de l'expérience aléatoire.

Exemple : On lance un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6. L'évènement « obtenir un 7 » est impossible. L'évènement « obtenir un nombre plus petit que 10 » est certain.

Propriétés :

- La probabilité d'un évènement impossible est 0.
- La probabilité d'un évènement certain est 1.

Définition : L'évènement contraire d'un évènement A est l'évènement noté \bar{A} , qui se réalise quand A ne se réalise pas. \bar{A} est réalisé pour toutes les issues qui ne réalisent pas A .

Exemple : Pierre possède un sac contenant 3 boules rouges, 2 vertes et 4 bleues. Il en choisit une au hasard. L'évènement contraire de l'évènement A « Obtenir une boule bleue » est l'évènement \bar{A} « Ne pas obtenir une boule bleue », c'est-à-dire « Obtenir une boule verte ou rouge. »

Propriété :

La somme des probabilités d'un évènement et de son contraire est égale à 1 : $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

Conséquence : $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Exemple : On reprend l'exemple précédent.

$$P(A) = \frac{4}{3 + 2 + 4} = \frac{4}{9} \quad \text{donc} \quad P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{9}{9} - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

Conclusion : la probabilité que Pierre ne choisisse pas une boule bleue est égale à $\frac{5}{9}$