PROPORTIONNALITÉ

1) SITUATION DE PROPORTIONNALITÉ

Définition : Deux grandeurs sont proportionnelles si les valeurs de l'une de ces grandeurs s'obtiennent en multipliant les valeurs de l'autre grandeur par un même nombre, appelé coefficient de proportionnalité.

<u>Exemple</u> : Des t-shirts sont vendus au prix unitaire de 11 €. Le prix à payer s'obtient en multipliant le nombre de t-shirts achetés par 11.

Le nombre de t-shirts achetés et le prix total à payer sont deux grandeurs proportionnelles. 11 est le coefficient de proportionnalité.

Luc a acheté 6 t-shirts. Le prix qu'il doit payer est : $6 \times 11 = 66$ €.

Sylvie a acheté des t-shirts et a payé 132 €. Le nombre de t-shirts qu'elle a achetés est : $132 \div 11 = 12$.

Les deux grandeurs étudiées sont le nombre de t-shirts et le prix à payer. On peut regrouper toutes les valeurs dans un tableau appelé tableau de proportionnalité.

Nombre de t-shirts	1	6	12
Prix à payer (en €)	11	66	132

$\div 11$ $\quad$ $\times 11$

Définition : Dans un tableau représentant deux grandeurs, si les valeurs de l'une de ces grandeurs s'obtiennent en multipliant les valeurs de l'autre grandeur par un même nombre, ce tableau est appelé tableau de proportionnalité.

Méthode : Pour savoir si deux grandeurs représentées dans un tableau sont proportionnelles, on calcule les quotients des valeurs correspondantes de ces grandeurs.

<u>Exemple</u> : Le tableau de droite donne la consommation, en fonction du temps, d'un robinet mal fermé.

Temps écoulé (en jours)	1	7	365
Quantité d'eau (en L)	0,432	3,024	157,68

$$\frac{0,432}{1} = 0,432 \qquad \frac{3,024}{7} = 0,432 \qquad \frac{157,768}{365} = 0,432$$

Les trois quotients sont égaux à 0,432. Le tableau est donc un tableau de proportionnalité. C'est-à-dire que la quantité d'eau est proportionnelle au temps écoulé, avec 0,432 pour coefficient de proportionnalité.

<u>Exemple</u> : Angèle et Clara achètent respectivement un pack de 6 L de jus d'orange à 9,12 € et un pack de 4 L à 6,48 €. On place toutes ces informations dans le tableau de droite.

Quantité de jus (en L)	6	4
Prix à payer (en €)	9,12	6,48

$$\frac{9,12}{6} = 1,52 \qquad \frac{6,48}{4} = 1,62$$

Les quotients ne sont pas égaux. Ce tableau n'est donc pas un tableau de proportionnalité. C'est-à-dire que le prix à payer n'est pas proportionnel à la quantité de jus achetée. Il n'y a pas de coefficient de proportionnalité.

2) QUATRIÈME PROPORTIONNELLE

Propriété : Dans un tableau de proportionnalité à quatre cases, lorsqu'on connait trois valeurs, on peut toujours calculer la quatrième valeur appelée quatrième proportionnelle.

Méthode n°1 : On veut connaître le prix de 7 kg de tomates.

1) On calcule le produit des deux valeurs situées dans la diagonale qui ne contient pas la case vide.

$$12 \times 7 = 84$$

2) On divise le résultat par la troisième valeur connue.

$84 \div 5 = 16{,}8 \quad \rightarrow \quad$ le prix de 7 kg de tomates est 16,80 €

Masse de tomates (en kg)	5	7
Prix (en €)	12	...

Masse de tomates (en kg)	5	7
Prix (en €)	12	...

Méthode n°2 avec le coefficient de proportionnalité

On veut connaître la surface de tissus nécessaire pour fabriquer 32 sacs.

On sait que pour fabriquer 10 sacs, il faut 20 m² de tissus. Donc on passe du nombre de sacs à la surface de tissus en multipliant par 2.

Alors pour fabriquer 32 sacs, on a besoin de :
$32 \times 2 = 64$ m² de tissus.

Nombre de sacs fabriqués	10	32
Surface de tissu (en m²)	20	

Nombre de sacs fabriqués	10	32
Surface de tissu (en m²)	20	64

$\times 2$

Méthode n°3 par le passage à l'unité :

On sait que Martine parcourt 12 km en 3 h. Quelle distance pourra-t-elle parcourir en 5 h ?

En 3 h elle parcourt 12 km. Donc en 1 h elle parcourt 3 fois moins de distance qu'en 3 h, soit $12 \div 3 = 4$ km.

Si en 1 h elle parcourt 4 km, elle parcourra 5 fois plus de distance en 5 h, soit $4 \times 5 = 20$ km.

Temps de marche (en h)	3	5
Distance parcourue (en km)	12	

$\div 3$ $\quad \times 5$

Temps de marche (en h)	3	1	5
Distance parcourue (en km)	12	4	20

$\div 3$ $\quad \times 5$

Méthode n°4 par les colonnes :

Pour obtenir une valeur dans une colonne, on peut :

- ajouter les valeurs de deux autres colonnes sur la même ligne ;
- multiplier ou diviser la valeur d'une autre colonne sur la même ligne par un même nombre.

À la cantine, tous les repas sont au même prix. Si 3 repas coûtent 12,90 € et 2 repas coûtent 8,60 € alors :

- 5 repas coûtent $12{,}9 + 8{,}6 = 21{,}50$ €.
- 15 repas coûtent $21{,}5 \times 3 = 64{,}50$ €.

$\times 3$

Nombre de repas	3	+	2	5	15
Prix (en €)	12,90	+	8,60	21,50	64,50

$\times 3$

3) APPLIQUER UN TAUX DE POURCENTAGE

Définition : Un pourcentage est une proportion par rapport à 100. Il traduit une situation de proportionnalité.

<u>Exemple</u> : L'eau de la mer Méditerranée contient 4% de sel. Cela signifie que :

- 100 g d'eau contiennent 4 g de sel ;
- La proportion de sel dans l'eau est égale à $\frac{4}{100}$;
- La masse de sel et la masse d'eau sont proportionnelles avec pour coefficient de proportionnalité 0,04.

Masse d'eau (en g)	100
Masse de sel (en g)	4

$\times 0{,}04$

$$Donc\ \ 4\% = \frac{4}{100} = 0{,}04$$

Propriété : Pour calculer t % d'une quantité, on multiplie cette quantité par $\frac{t}{100}$.

Exemple : On veut connaître la masse de sel contenue dans 680 g d'eau de la méditerranée. On doit donc calculer 4% de 680 g :

$$680 \times \frac{4}{100} = 680 \times 0{,}04 = 27{,}2 \text{ g}$$

Masse d'eau (en g)	100	680
Masse de sel (en g)	4	?

$\times 0{,}04$

4) UTILISER UNE ÉCHELLE

Définition : Dans une représentation à l'échelle, les longueurs représentées et les longueurs réelles sont proportionnelles.

L'échelle est le coefficient de proportionnalité.

Elle est égale au rapport $\frac{LONGUEUR\ REPRÉSENTÉE}{LONGUEUR\ RÉELLE}$ où les deux longueurs sont exprimées dans la même unité.

- Si l'échelle est inférieure à 1, la représentation est une réduction.
- Si l'échelle est supérieure à 1, la représentation est un agrandissement.

Exemple : Sur le plan à l'échelle $\frac{1}{200\ 000}$ que l'on peut aussi noter 1 : 200 000, le chemin de randonnée entre les Granges d'Astau et le lac d'Oô mesure environ 3,4 cm. On veut connaître la longueur réelle.

Longueur sur le plan (en cm)	1	3,4
Longueur réelle (en cm)	200 000	?

$\div 200\ 000$ $\quad \times 200\ 000$

Une longueur de 3,4 cm sur le plan correspond à une longueur réelle de $3{,}4 \times 200\ 000 = 680\ 000$ cm, soit 6 800 m ou encore 6,8 km.

5) PARTAGER UNE QUANTITÉ SELON UN RATIO

Définition : Soient les nombres a, b, x et y. On dit que a et b sont dans le ratio $x : y$ si $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$

Exemple : Partager des œufs de Pâques selon le ratio 2 : 3 entre David et Olivier signifie qu'à chaque fois qu'on donne 2 œufs à David, on en donne 3 à Olivier. Le nombres d'œufs de David et le nombre d'œufs d'Olivier sont alors dans le ratio 2 : 3 qu'on lit « 2 pour 3 ».

Propriété : Si a et b sont dans le ratio 2 : 3, alors le tableau de droite est un tableau de proportionnalité. a est égal à $\frac{2}{5}$ de la somme $a + b$. b est égal à $\frac{3}{5}$ de la somme $a + b$.

a	b
2	3

Remarque : Cette propriété reste vraie si on change de ratio.

Exemple : On partage 30 œufs selon le ratio 2 : 3 entre David et Olivier. David recevra $\frac{2}{5} \times 30 = \frac{60}{5} = 12$ œufs. Olivier recevra $\frac{3}{5} \times 30 = \frac{90}{5} = 18$ œufs, c'est-à-dire $30 - 12 = 18$. Le tableau de droite est un tableau de proportionnalité.

12	18
2	3

Définition : Soient les nombres a, b, c, x, y et z. On dit que a, b et c sont dans le ratio $x : y : z$ si $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$

Exemple : a, b et c sont dans le ratio 2 : 3 : 5 si $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5}$

Dans la recette d'un gâteau pour 4 personnes, il faut 200 g de sucre, 300 g de farine et 500 de lait. Les quantités de sucre, de farine et de lait sont dans le ratio 2 : 3 : 5 car $\frac{200}{2} = \frac{300}{3} = \frac{500}{5} = 100$