LES NOMBRES RATIONNELS

1) DIVISION EUCLIDIENNE

Objectif : Effectuer une division euclidienne, c'est trouver combien de fois une quantité contient une plus petite quantité. La division euclidienne ne concerne que les nombres entiers.

Exemples :

- Combien de bouquets de 5 roses peut-on réaliser avec 30 roses ? La quantité 30 contient 6 fois la quantité 5 car $6 \times 5 = 30$. Donc la division euclidienne de 30 par 5 donne 6 comme résultat.
- Combien de bouquets de 5 roses peut-on réaliser avec 32 roses ? La quantité 30 contient 6 fois la quantité 5 car $6 \times 5 = 30$. En revanche il reste 2 roses non utilisées. Donc la division euclidienne de 32 par 5 donne 6 comme résultat avec un reste de 2.

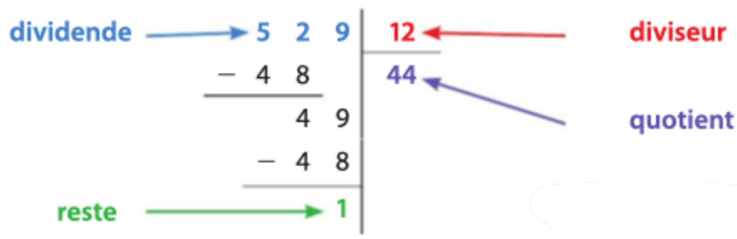
Définitions : a et b sont deux entiers naturels, $b \neq 0$. Effectuer une division euclidienne de a par b, c'est trouver deux entiers naturels q et r tels que $a = b \times q + r$ avec $r < b$.

a s'appelle le dividende, b le diviseur, q le quotient et r le reste.

Poser une division euclidienne :

- Division euclidienne de 529 par 12.

  On écrit alors : $\mathbf{529 = 12 \times 44 + 1}$



Définitions : Lorsque le reste de la division euclidienne de a par b est nul, on dit que

- a est divisible par b
- b est un diviseur de a
- a est un multiple de b

Exemple : Le reste de la division euclidienne de 105 par 7 est nul, on dit alors que :

105 est divisible par 7 — 7 est un diviseur de 105 — 105 est un multiple de 7

Définitions :

- Les nombres entiers qui sont divisibles par 2 sont appelés les nombres pairs.
- Les nombres entiers qui ne sont pas pairs sont appelés les nombres impairs.

Critères de divisibilité :

- Un nombre est divisible par 2 si son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8.
- Un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
- Un nombre est divisible par 5 si son chiffre des unités est 0 ou 5.
- Un nombre est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9.
- Un nombre est divisible par 10 si son chiffre des unités est 0.

2) NOMBRES PREMIERS

Définition : Un nombre premier est un entier naturel qui admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Exemples : 7 est un nombre premier car il n'est divisible que par 1 et par 7.
6 n'est pas un nombre premier car il est divisible par aussi par 2 et 3.

Remarques :

- 0 n'est pas un nombre premier car il possède une infinité de diviseurs.
- 1 n'est pas un nombre premier car il n'a qu'un seul diviseur : lui-même.
- 2 est le seul nombre premier et pair. Tous les autres nombres premiers sont impairs.

Propriété : Tout entier naturel supérieur ou égal à 2 peut s'écrire comme un produit de facteurs premiers. Ce produit de facteurs premiers est unique, si l'on ne tient pas compte de l'ordre des facteurs.

Exemple : $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$ $\quad 728 = 2 \times 2 \times 2 \times 7 \times 13$

Méthode : Pour décomposer un nombre en produit de facteurs premiers :

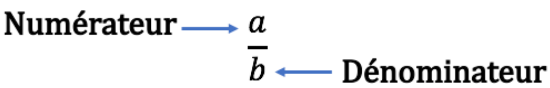
- On écrit ce nombre comme un produit de deux facteurs ;
- On recommence avec les facteurs qui ne sont pas des nombres premiers, jusqu'à n'avoir que des nombres premiers.

Exemple : $60 = 2 \times 30 = 2 \times 2 \times 15 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$

3) NOMBRES RATIONNELS

Définition : Un nombre rationnel est un nombre qui est le quotient (c'est-à-dire le résultat) de la division d'un nombre entier relatif par un autre nombre entier relatif non nul.

Vocabulaire :



$$\frac{a}{b} = a \div b$$

La fraction $\frac{a}{b}$ est l'écriture fractionnaire du quotient $a \div b$.

Attention : Le dénominateur d'une fraction ne peut jamais être nul.

Propriété : Soient a et b deux nombres relatifs, avec $b \neq 0$, le quotient de a par b est le nombre qui multiplié par b donne a :

$$\frac{a}{b} \times b = a$$

Exemples :

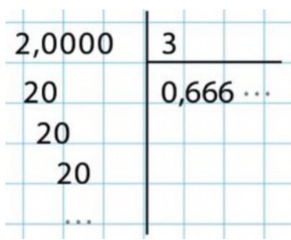
$$\frac{12}{4} = 12 \div 4 = 3 \qquad 3 \times 4 = 12 \qquad \frac{12}{4} \times 4 = 12$$

Définitions :

- Soient a et b deux entiers. Lorsque b est égal à 10, 100, 1000, ... on dit que $\frac{a}{b}$ est une fraction décimale.
- Un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'une fraction décimale. Le nombre de chiffres après la virgule d'un nombre décimal est limité.

Exemples :

- $\frac{139}{100}$ est une fraction décimale car son dénominateur est 100.
- 1,39 est un nombre décimal car $1{,}39 = \frac{139}{100}$
- La fraction $\frac{2}{3}$ n'est pas égale à un nombre décimal car la division de 2 par 3 ne s'arrête jamais. Son résultat est un nombre qui a une infinité de chiffres après la virgule.



Propriété : Une fraction ne change pas quand on multiplie ou on divise son numérateur et son dénominateur par un même nombre différent de 0.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k} \qquad \frac{a}{b} = \frac{a \div k}{b \div k}$$

Définition : Simplifier une fraction consiste à trouver une fraction qui lui soit égale avec un numérateur et un dénominateur les plus petits possibles.

<u>Exemple</u> :

$$\frac{14}{10} = \frac{7 \times \mathbf{2}}{5 \times \mathbf{2}} = \frac{7}{5}$$

Propriété : égalité des produits en croix

$$\text{Si } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ alors } ad = bc \qquad \text{Si } ad = bc \ alors\ \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

<u>Exemple</u> : On veut savoir si les fractions $\frac{20}{35}$ et $\frac{24}{42}$ sont égales.

On calcule les produits en crois : $20 \times 42 = 840$ et $35 \times 24 = 840$

Puisque les produits en croix sont égaux, on peut affirmer que $\frac{20}{35} = \frac{24}{42}$

4) COMPARER LES FRACTIONS

Propriété : a, b et c sont trois nombres entiers relatifs et $c > 0$.

$$\text{Si } a < b \text{ alors } \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$$

<u>Exemple</u> :

$$3 < 5 \text{ alors } \frac{3}{5} < \frac{4}{5}$$

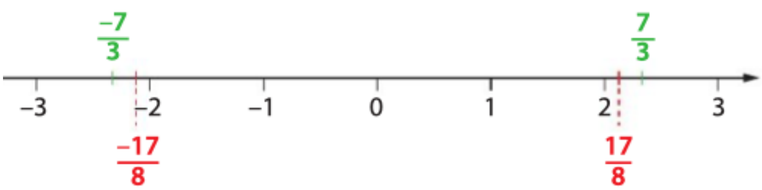
Règles pour comparer deux quotients :

- Une fraction positive est toujours plus grande qu'une fraction négative.
- Si les deux fractions ont le même dénominateur positif, on applique la propriété précédente.
- Sinon, on transforme les deux fractions en deux fractions ayant le même dénominateur et on compare.

<u>Exemple</u> : On veut comparer $\frac{17}{8}$ et $\frac{7}{3}$

$$\frac{17}{8} = \frac{17 \times 3}{8 \times 3} = \frac{51}{24} \qquad \frac{7}{3} = \frac{7 \times 8}{3 \times 8} = \frac{56}{24}$$

$$51 < 56 \text{ donc } \frac{17}{8} < \frac{7}{3}$$



On peut aussi affirmer que $\frac{-17}{8} > \frac{-7}{8}$

5) ADDITIONNER ET SOUSTRAIRE DES QUOTIENTS

Propriété : Pour additionner ou soustraire deux fractions qui ont le même dénominateur :

- On additionne ou on soustrait les numérateurs ;
- On garde le dénominateur commun.

$$\boldsymbol{\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}} \qquad \boldsymbol{\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}}$$

<u>Exemples</u> : $\frac{2}{5} + \frac{4}{5} = \frac{2+4}{5} = \frac{6}{5}$ $\qquad \frac{7}{3} - \frac{5}{3} = \frac{7-5}{3} = \frac{2}{3}$

Méthode : Pour addition ou soustraire deux fractions qui n'ont pas le même dénominateur, on doit d'abord les écrire avec le même dénominateur.

Exemples :

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{1\times 2}{2\times 2}+\frac{3}{4}=\frac{2}{4}+\frac{3}{4}=\frac{2+3}{4}=\frac{5}{4} \qquad \frac{3}{4}-\frac{11}{6}=\frac{3\times 3}{4\times 3}-\frac{11\times 2}{6\times 2}=\frac{9}{12}-\frac{22}{12}=\frac{9-22}{12}=\frac{-13}{12}$$

Dans l'exemple de droite, pour ne pas compliquer les calculs, on cherche le multiple le plus petit possible.

6) DÉCOMPOSITION D'UNE FRACTION

Propriété : Tout nombre est égale à une fraction dont le dénominateur est 1.

$$a=\frac{a}{1}$$

Propriété : Toute fraction peut s'écrire sous la forme d'une somme ou d'une différence d'un nombre entier et d'une fraction comprise entre 0 et 1.
Exemple :

$$\frac{17}{5}=\frac{15+2}{5}=\frac{15}{5}+\frac{2}{5}=3+\frac{2}{5}$$

$$0\leq\frac{2}{5}<1$$

7) MULTIPLICATION ET DIVISION DE QUOTIENTS

Propriété : Pour multiplier une fraction par un nombre entier :

- on multiplie son numérateur par ce nombre ;
- on conserve le dénominateur.

$$\boldsymbol{k\times\frac{a}{b}=\frac{k\times a}{b}}$$

Exemple : $-3\times\frac{2}{7}=\frac{-3\times 2}{7}=-\frac{6}{7}$

Méthode : On utilise cette propriété pour calculer une fraction d'une grandeur.

Exemple : On veut calculer ce que représentent les deux tiers d'une bouteille de 75 cL.

$$\frac{2}{3}\times 75=\frac{2\times 75}{3}=\frac{150}{3}=50.$$

Donc les deux tiers de 75 cL représentent 50 cL.

Propriété : Pour multiplier deux fractions :

- on multiplie les numérateurs entre eux ;
- on multiplie les dénominateurs entre eux.

$$\boldsymbol{\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}}$$

Exemples : $\frac{3}{8}\times\frac{-1}{4}=\frac{3\times(-1)}{8\times 4}=\frac{-3}{32}$

Alice a mangé les $\frac{3}{7}$ des $\frac{2}{5}$ d'une tarte. Quelle fraction de la tarte a-t-elle mangée ?

$$\frac{3}{7}\times\frac{2}{5}=\frac{3\times 2}{7\times 5}=\frac{6}{35}$$

Définition : Soit a un nombre relatif non nul. L'inverse de a est le nombre qui multiplié à a donne 1.

Méthode : Pour simplifier les calculs, il est souvent astucieux de décomposer les facteurs des numérateurs et des dénominateurs.

Exemple : $\frac{32}{75} \times \frac{55}{24} = \frac{32 \times 55}{75 \times 24} = \frac{4 \times 8 \times 5 \times 11}{5 \times 15 \times 3 \times 8} = \frac{4 \times 11}{15 \times 3} = \frac{44}{45}$

8) INVERSE D'UN NOMBRE

Définition : Deux nombres sont inverses l'un de l'autre si leur produit est égal à 1.

Exemples : 2 et 0,5 sont inverses car $2 \times 0{,}5 = 1$. 10 et 0,1 sont inverses car $10 \times 0{,}1 = 1$.

Propriétés : L'inverse de a est $\frac{1}{a}$ L'inverse de $\frac{a}{b}$ est $\frac{b}{a}$

Exemples : L'inverse de 4 est $\frac{1}{4}$ L'inverse de $\frac{1}{4}$ est 4 L'inverse de $\frac{2}{3}$ est $\frac{3}{2}$

Attention :

- 0 n'a pas d'inverse.
- Il ne faut pas confondre inverse et opposé : L'inverse de 5 est $\frac{1}{5}$ mais l'opposé de 5 est -5.

9 DIVISION PAR UNE FRACTION

Propriétés : Diviser une fraction par une fraction revient à multiplier la première par l'inverse de la seconde.

$$\boldsymbol{\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}}$$

Exemple :

$$\frac{3}{10} \div \frac{2}{5} = \frac{3}{10} \times \frac{5}{2} = \frac{3 \times 5}{10 \times 2} = \frac{3 \times 5}{2 \times 5 \times 2} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

Remarque : Si on reprend la formule précédente, en remplaçant b et d par 1, on obtient :

$$a \div c = a \times \frac{1}{c} = \frac{a}{c}$$