

VARIABLES ALÉATOIRES

Soit une expérience aléatoire possédant un nombre fini d'issues. Son univers est l'ensemble Ω .

I / VARIABLES ALÉATOIRES

Définition : Une variable aléatoire sur Ω est une fonction de Ω vers \mathbb{R} qui à chaque évènement associe un nombre réel.

Notations :

- Une variable aléatoire est généralement notée par une lettre majuscule X, Y, Z, \dots
- L'évènement « X prend la valeur a » est noté $\{X = a\}$.
- L'évènement « X prend une valeur strictement inférieure à a » est noté $\{X < a\}$.

Exemple : On lance un dé non pipé à 6 faces et on associe à chaque face un gain G .

Issue	1	2	3	4	5	6
Gain G	4 €	4 €	4 €	1 €	1 €	-5 €

La variable aléatoire G prend 3 valeurs : -5, 1 et 4.

L'évènement $\{G = 1\}$ est réalisé pour les issues 4 et 5. L'évènement $\{G < 2\}$ est réalisé pour les issues 4, 5 et 6.

II / LOI DE PROBABILITÉ D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE

On considère une variable aléatoire X définie sur un univers Ω . X prend les valeurs $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Définition : Définir la loi de probabilité de X , c'est associer à chaque valeur x_i (avec $1 \leq i \leq n$), la probabilité de l'évènement $\{X = x_i\}$, notée $p(X = x_i)$.

Exemple : À partir de l'exemple précédent, la loi de probabilité de G est donnée par le tableau ci-contre.

$$p(G = 4) = p(\{1; 2; 3\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Gain x_i (en €)	-5	1	4
$p(G = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

III / ESPÉRANCE, VARIANCE, ÉCART-TYPE

Soit une variable aléatoire X définie sur un univers Ω dont la loi de probabilité est donnée ci-contre.

x_i (Valeurs de X)	x_1	x_2	...	x_n
$p(G = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

Définitions : On définit les trois nombres réels suivants :

- L'espérance de X : $E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n$.
- La variance de X : $V(X) = p_1 (x_1 - E(X))^2 + p_2 (x_2 - E(X))^2 + \dots + p_n (x_n - E(X))^2$.
- L'écart-type de X : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Jeu équitable : Supposons que Ω est l'ensemble des issues d'un jeu de hasard et que la variable aléatoire X définie sur Ω donne le gain du joueur. On dira que ce jeu est équitable si $E(X) = 0$.

Exemple : À partir de l'exemple précédent, on obtient que $E(G) = \frac{1}{6} \times (-5) + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{2} \times 4 = 1,5$. Ce jeu n'est donc pas équitable, du point de vue des mathématiques.