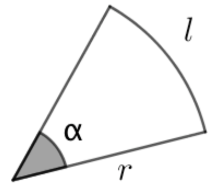
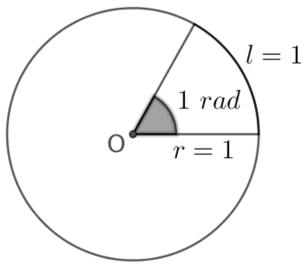
TRIGONOMÉTRIE

I / LE RADIAN



Propriété 1 : La longueur d'un arc de cercle de rayon r et d'angle au centre de mesure α exprimée en degrés est :

$$l = \frac{\pi r \alpha}{180} \quad \text{avec} \quad 0 \leq \alpha \leq 360°$$



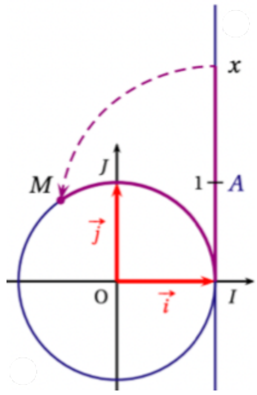
Définition : On considère un cercle de centre O et de rayon $r = 1$. Le radian (symbole rad) est la mesure d'un angle au centre qui intercepte sur le cercle un arc de longueur 1.

Propriété 2 : Les mesures θ en radians et α en degrés d'un même angle sont proportionnelles :

$$\frac{\theta}{\pi} = \frac{\alpha}{180} \qquad \text{Exemple : } 60° \text{ correspond à } \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

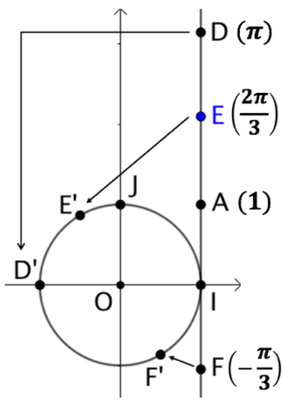
Propriété 3 : La longueur d'un arc de cercle de rayon r et d'angle au centre de mesure θ exprimée en radian est $l = r\theta$ avec $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

II / ENROULEMENT DE LA DROITE NUMÉRIQUE



Définition : Dans un repère orthonormé (O, I, J), le cercle trigonométrique est le cercle de centre O, de rayon 1 et qui est muni d'un sens direct qui est le sens contraire des aiguilles d'une montre.

Soit le point A de coordonnées $(1; 1)$ et la droite (IA), dite droite des réels, munie du repère (I, A). On « enroule » cette droite autour du cercle trigonométrique. Ainsi à tout nombre réel x sur la droite (IA) correspond un point M du cercle que l'on appelle point image du nombre réel x.



D'après la propriété 3, la mesure d'un arc est égale à la mesure de l'angle au centre qui l'intercepte puisque le rayon du cercle trigonométrique est 1.

Exemples :

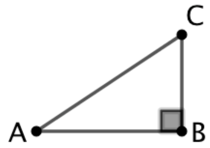
- Lors de l'enroulement, le point E devient le point E'. La mesure de l'angle $\widehat{IOE'}$ est $\frac{2\pi}{3}$ rad. L'abscisse du point E est donc $\frac{2\pi}{3}$.
- De même, l'abscisse du point D est π et celle de F est $-\frac{\pi}{3}$.

Propriété 4 : Si x et y sont des nombres réels tels $x - y = k \times 2\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$, alors x et y ont le même point image sur le cercle trigonométrique.

Conséquence : Si M est le point du cercle trigonométrique qui est l'image du nombre réel x, alors M est aussi l'image de tous nombres réels $x + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

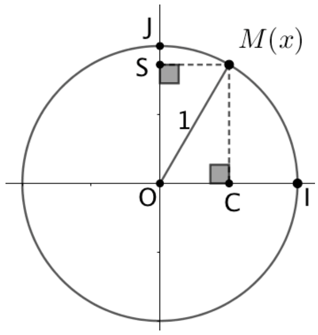
Exemple : Les nombres réels π et 7π ont le même point image car $7\pi = \pi + 3 \times 2\pi$.

III/ COSINUS ET SINUS D'UN NOMBRE RÉEL



Rappel :

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{AB}{AC} \qquad \sin \widehat{BAC} = \frac{BC}{AC} \qquad \text{pour} \quad 0 \leq \widehat{BAC} \leq \frac{\pi}{2}$$



Définitions : Dans un repère $O, I, J)$, on considère le cercle trigonométrique de centre O. M est le point du cercle image d'un nombre réel x.

- Le cosinus de x, noté $\cos x$, est l'abscisse du point M.
- Le cosinus de x, noté $\sin x$, est l'ordonnée du point M.

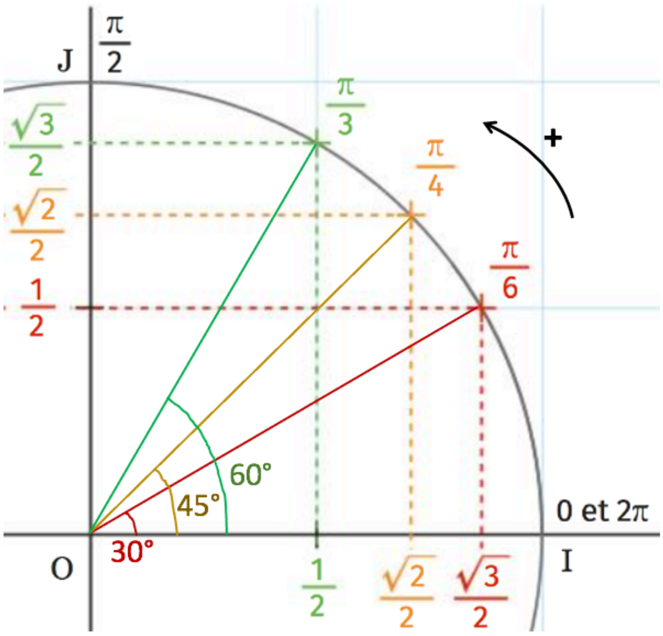
Si $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, on retrouve bien les définitions du cosinus et du sinus données en classe de seconde :

$$\cos x = \frac{OC}{AM} = OC \qquad \sin x = \frac{CM}{OM} = CM = OS$$

Propriétés 5 : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad -1 \leq \cos x \leq 1 \qquad -1 \leq \sin x \leq 1 \qquad \cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Tableau de valeurs remarquables :

Angle	0°	30°	45°	60°	90°	180°
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0



IV / FONCTIONS COSINUS ET SINUS

Définitions :

- La fonction cosinus est la fonction qui à tout nombre réel x associe $\cos x$.
- La fonction sinus est la fonction qui à tout nombre réel x associe $\sin x$.

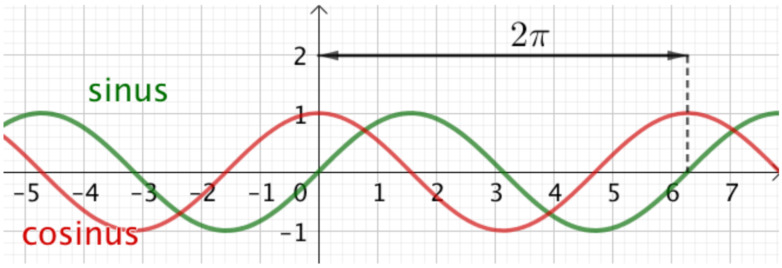
Propriétés 6 :

- La fonction cosinus est paire : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(-x) = \cos x$.
- La fonction sinus est impaire : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(-x) = -\sin x$.

Propriété 7 : Les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad \cos(x + 2\pi) = \cos x \qquad \sin(x + 2\pi) = \sin x$

Courbes représentatives : Les courbes représentatives des fonctions cosinus et sinus sont des sinusoïdes.



La courbe représentative de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

La courbe représentative de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Sens de variation de la fonction cosinus :

- Décroissante sur $[0; \pi]$
- Croissante sur $[\pi; 2\pi]$

Sens de variation de la fonction sinus :

- Croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$
- Décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$
- Croissante sur $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$