SUITES

I / GÉNÉRALITÉS

Définition : Une suite numérique u est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ qui à un entier naturel n associe le nombre réel $u(n)$.

Notation : On préfère la notation u_n au lieu de $u(n)$. La suite est u notée (u_n).

Exemple : La suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 2n + 1$
$u_0 = 2 \times 0 + 1 = 1 \qquad u_1 = 2 \times 1 + 1 = 3 \qquad u_2 = 2 \times 2 + 1 = 5$
On observe que (u_n) est la suite de tous les nombres impairs.

Vocabulaire : u_n est le terme général de la suite (u_n) de rang n.

Remarque : Très souvent le premier terme de la suite est u_0 ou u_1. Mais il est possible de faire démarrer la suite pour tout entier naturel.

On peut définir une suite (u_n) de manière explicite ou par une relation de récurrence.

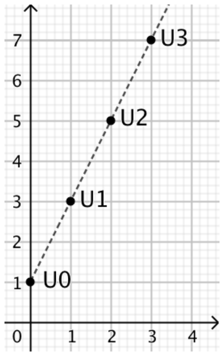
Définition explicite : Une suite (u_n) est définie explicitement lorsque l'on peut calculer n'importe quel terme de la suite directement en fonction de n. On donne alors l'expression du terme général u_n en fonction de n.

Exemple : Voir l'exemple précédent

Définition par récurrence : Une suite est (u_n) définie par récurrence lorsqu'elle est définie par la donnée de son premier terme et d'une relation qui permet de calculer un terme à partir du terme précédent. On donne alors l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n. Cette relation est appelée relation de récurrence.

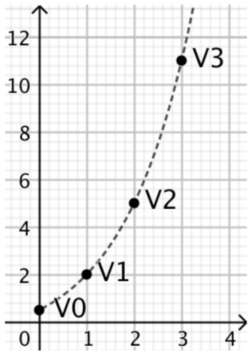
Exemples : $v_{n+1} = 2v_n + 1$ et $v_0 = 0{,}5$.
$v_1 = 2 \times v_0 + 1 = 2 \times 0{,}5 + 1 = 2 \qquad v_2 = 2 \times v_1 + 1 = 2 \times 2 + 1 = 5$
$w_{n+1} = 2w_n + 1$ et $w_0 = 1$.
$w_1 = 2 \times w_0 + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3 \qquad w_2 = 2 \times w_1 + 1 = 2 \times 3 + 1 = 7$

Représentation graphique : On utilise un repère à deux axes. Sur l'axe des abscisses, on place les valeurs prises par le rang n et sur l'axe des ordonnées les valeurs prises par u_n.



$u_n = 2n + 1$

On remarque que les points U_n de coordonnées (n, u_n) sont situés sur la droite affine d'équation $y = 2x + 1$



$v_{n+1} = 2v_n + 1$ et $v_0 = 0{,}5$

On remarque que les points V_n de coordonnées (n, v_n) sont situés sur la courbe d'équation

$$y = \frac{3}{2} \times 2^x - 1$$

II / SENS DE VARIATION D'UNE SUITE

Définition : Soit une suite (u_n) et un entier naturel p.

- (u_n) est croissante ssi pour tout entier naturel $n \geq p$, $u_{n+1} \geq u_n$.
- (u_n) est décroissante ssi pour tout entier naturel $n \geq p$, $u_{n+1} \leq u_n$.
- (u_n) est constante ssi pour tout entier naturel $n \geq p$, $u_{n+1} = u_n$.

Vocabulaire : une suite croissance, décroissante ou constante est appelée suite monotone.

Méthodes pour étudier le sens de variation :

1. On étudie le signe de l'expression $u_{n+1} - u_n$ après l'avoir simplifiée.
2. Si les termes de la fonction sont positifs, on compare l'expression $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1.

   Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ alors la suite est croissante. Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ alors la suite est décroissante.

III / SUITE ARITHMÉTIQUE

Dans cette partie on considère une suite (u_n) de premier terme u_0.

Définition par récurrence : (u_n) est arithmétique ssi la différence entre deux termes consécutifs est constante, c'est-à-dire s'il existe un nombre réel r tel que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + r$. Le nombre r est appelé raison de la suite (u_n).

Exemple : la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + 3$. (u_n) est arithmétique de raison 3.

Propriété 1 : Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r, alors pour tous entiers naturels n et p,

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

Conséquence (définition explicité) : La suite arithmétique (u_n) de raison r et de premier terme u_0 est définie pour tout entier naturel n par : $u_n = u_0 + nr$.

Propriété 2 : Pour entier naturel n non nul,

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Propriété 3 : Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0. Alors :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} = n\frac{u_0 + u_{n-1}}{2} \qquad u_1 + u_2 + \cdots + u_n = n\frac{u_1 + u_n}{2}$$

Pour retenir cette formule : la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique est égale à n fois la moyenne arithmétique de u_0 et u_{n-1}.

La formule avec n+1 termes : $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n+1)\dfrac{u_0 + u_n}{2}$

Sens de variation (propriété 4) : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r,

(u_n) est croissante si $r > 0$ $\qquad$ (u_n) est décroissante si $r < 0$ $\qquad$ (u_n) est constante si $r = 0$

Propriété 4 : La représentation graphique d'une suite arithmétique est un nuage de points alignés. On dit que les termes d'une suite arithmétique suivent une progression linéaire.

IV / SUITE GÉOMÉTRIQUE

Dans cette partie on considère une suite (u_n) de premier terme u_0.

Définition par récurrence : (u_n) est géométrique ssi le rapport entre deux termes consécutifs est constant, c'est-à-dire s'il existe un réel non nul q tel que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = q \times u_n$.
Le nombre q est appelé raison de la suite (u_n).

Exemple : la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 4u_n$. (u_n) est géométrique de raison 4.

Propriété 5 : Si (u_n) est une suite géométrique de raison q alors pour tous entiers naturels n et p,

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

Conséquence (définition explicite) : La suite géométrique (u_n) de raison q et de premier terme u_0 est définie pour tout entier naturel n par $u_n = u_0 \times q^n$

Propriété 6 : Pour entier naturel n non nul et pour tout réel $q \neq 1$,

$$1 + q + q^2 \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Propriété 7 : Si (u_n) est une suite géométrique de raison $q \neq 1$ alors

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} = u_0 \frac{1 - q^n}{1 - q} \qquad u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Pour retenir cette formule : la somme des n premiers termes d'une suite géométrique est égale au produit du premier terme par la somme des n premières puissances de la raison.

Signe d'une suite géométrique (propriété 8) : Le signe de tous les termes d'une suite géométrique de raison positive est constant. Autrement dit : si la raison est positive, u_n est du même signe que u_0.

Sens de variation (propriété 9) : Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q > 0$ avec $u_0 > 0$

(u_n) est croissante si $q > 1$ (u_n) est décroissante si $0 < q < 1$ (u_n) est constante si $q = 1$

De plus : Si $q < 0$ avec $u_0 > 0$, alors :

(u_n) est décroissante si $q > 1$ (u_n) est croissante si $0 < q < 1$ (u_n) est constante si $q = 1$

V / LIMITE D'UNE SUITE

Exemple n°1 : $u_n = 3n + 1$
Soit A un nombre réel très grand. Il est toujours possible de trouver un rang p tel que pour tout $n > p$, $u_n > A$. Il suffit de prendre pour p le premier entier naturel supérieur à $\frac{A-1}{3}$. On dira que $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = +\infty$

Exemple n°2 : $u_n = 9 \times 0{,}7^n$
Soit A un nombre réel très proche de 0. Il est toujours possible de trouver un rang p tel que pour tout $n > p, u_n < A$. On peut trouver la valeur de p avec une calculatrice. On dira que $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$

Exemple n°3 : $u_n = (-1)^n$
On observe que si n est pair, $u_n = 1$ et que si n est impair, $u_n = -1$. Cette suite ne possède pas de limite.