FONCTIONS DU SECOND DEGRÉ, ÉQUATIONS

I / GÉNÉRALITÉS

Définition : Étant donnés trois nombres réels a, b et c, avec $a \neq 0$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction polynôme du second degré f par $f(x) = ax^2 + bx + c$.
On dit que $ax^2 + bx + c$ est la forme développée de f.

Exemples : $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ $\quad g(x) = x^2$

Dans tout ce chapitre, sauf avis contraire, a, b et c sont trois nombres réels avec $a \neq 0$.

Propriété 1 : Étant donnés deux réels u et v, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a(x-u)(x-v)$ est une fonction polynôme du second degré. On dit que $a(x-u)(x-v)$ est la forme factorisée de f.

Propriété 2 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$. Alors pour tout réel x

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

On dit que f est écrite sous sa forme canonique.

Définition : l'expression $b^2 - 4ac$ est appelé discriminant de $ax^2 + bx + c$. On le note Δ.

Exemple :

$$2x^2 + 2x - 1 = 2\left[x^2 + x - \frac{1}{2}\right] = 2\left[x^2 + 2 \times \frac{1}{2} \times x - \frac{1}{2}\right] = 2\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right] = 2\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}\right]$$

II / RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

Définition : On appelle équation du second degré à une inconnue toute équation qui peut s'écrire sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$.

Propriété 3 : Soit l'équation $ax^2 + bx + c = 0$. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions distinctes :
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$
- Si $\Delta = 0$, l'équation a une solution double :
$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$
- Si $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution

Exemple : Résolution de l'équation $2x^2 + 5x - 3 = 0$

$\Delta = 5^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 49$ $\quad \Delta > 0$ donc l'équation a deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{49}}{2 \times 2} = -3 \qquad x_2 = \frac{-5 + \sqrt{49}}{2 \times 2} = \frac{1}{2}$$

Exemple : Résolution de l'équation $x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 = 0$

$\Delta = (2\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times 3 = 0$ $\quad \Delta = 0$ donc l'équation a une solution double : $-\sqrt{3}$

Propriété 4 : Soient x_1 et x_2 les solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$. Alors :

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \qquad\qquad x_1x_2=\frac{c}{a}$$

Propriété 5 : Soient deux réels x_1 et x_2. Posons $S=x_1+x_2$ et $P=x_1x_2$. Alors x_1 et x_2 sont les solutions de l'équation $x^2-Sx+P=0$.

III / **FACTORISATION ET SIGNE D'UNE FONCTION POLYNOME DU SECOND DEGRÉ**

Remarque : Résoudre l'équation $ax^2+bx+c=0$ équivaut à résoudre l'équation $f(x)=0$, où f est la fonction polynôme du second degré définie par $f(x)=ax^2+bx+c$.
On dira que les solutions, si elles existent de l'équation $ax^2+bx+c=0$ sont les racines de f.

Propriété 6 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^2+bx+c$.

- Si $\Delta>0$, $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$, où x_1 et x_2 sont les racines de f.
- Si $\Delta=0$, $f(x)=a(x-x_0)^2$ où x_0 est la racine double de f.
- Si $\Delta<0$, la fonction f n'est pas factorisable.

Exemple : Les solutions de l'équation $2x^2+5x-3=0$ sont -3 et $\frac{1}{2}$ donc

$$2x^2+5x-3=2(x+3)\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

Exemple : L'équation $x^2-2x+1=0$ a une solution double 1. Donc $x^2-2x+1=(x-1)^2$.
On retrouve la fameuse identité remarquable.

Propriété 7 : Signe de $f(x)$

Signe de $f(x)$ quand $\Delta>0$ $\qquad f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$x-x_1$	$-$	0	$+$	|	$+$
$x-x_2$	$-$	|	$-$	0	$+$
$(x-x_1)(x-x_2)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$a(x-x_1)(x-x_2)$	signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a

On dira que $f(x)$ est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe de $-a$ entre les racines.

Signe de $f(x)$ quand $\Delta=0$ $\qquad f(x)=a(x-x_0)^2$ alors $f(x)$ est du signe de a.

Signe de $f(x)$ quand $\Delta<0$

$$f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

$\Delta<0$ donc $-\dfrac{\Delta}{4a^2}>0$ par conséquent l'expression entre les crochets est positive.

alors $f(x)$ est du signe de a.

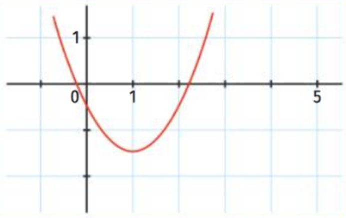
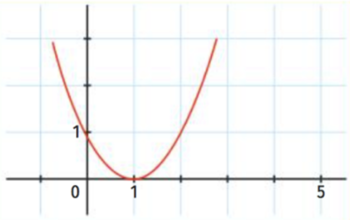
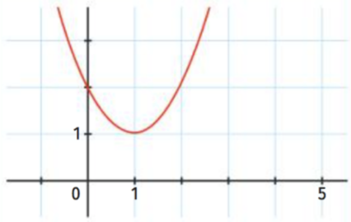
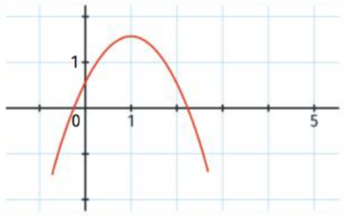
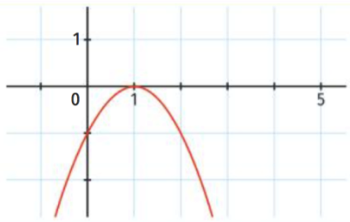
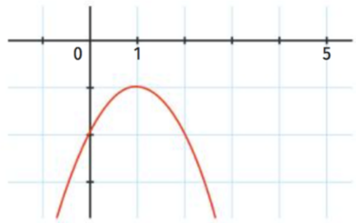
IV / INTERPRÉTATION GRAPHIQUE

Soit la fonction polynôme du second degré f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$. La courbe représentative de f est une parabole.

- Si $\Delta > 0$, la parabole a deux points d'intersection avec l'axe des abscisses en x_1 et x_2.
- Si $\Delta = 0$, la parabole a un seul point d'intersection avec l'axe des abscisses en x_0.
- Si $\Delta < 0$, la parabole n'a pas de point d'intersection avec l'axe des abscisses.

f possède un extremum pour $x = -\frac{b}{2a}$ qui est un minimum si $a > 0$ et un maximum si $a < 0$.

Position de la parabole selon le signe de a et de Δ :

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

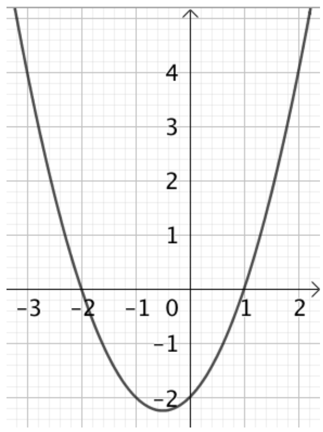
Exemple : $f(x) = x^2 + x - 2$.

On commence par résoudre l'équation $x^2 + x - 2 = 0$

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9$$

Les deux solutions sont $x_1 = -2$ et $x_2 = 1$

Par conséquent $f(x) = (x + 2)(x - 1)$



x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x + 2$		$-$		$+$		$+$	
$x - 1$		$-$		$-$		$+$	
$(x + 2)(x - 1)$		$+$		$-$		$+$	

On retrouve tous ces résultats en traçant la courbe représentative de la fonction.

Propriété 8 : la fonction f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ admet comme extremum $c - \frac{b^2}{4a}$ qu'elle atteint pour $x = -\frac{b}{2a}$. Cela découle de l'écriture canonique de $f(x)$.