PROBABILITÉS CONDITIONNELLES ET INDÉPENDANTES

Dans ce chapitre, on considère une expérience aléatoire dont on connait la loi de probabilité sur un univers Ω des issues possibles. On rappelle qu'un évènement est un sous-ensemble de Ω. Soient deux évènements A et B. On suppose que $p(A) \neq 0$.

I / GÉNÉRALITÉS

Rappels :

- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
- A et B sont dits incompatibles ssi $A \cap B = \emptyset$.
- Si les évènements A et B sont incompatibles alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

Définition : La probabilité de l'évènement B sachant A, est la probabilité que l'évènement B se réalise sachant que l'évènement A est réalisé, est notée $p_A(B)$ et est définie par :

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

Remarque : si $p(B) \neq 0$ alors :

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

Conséquence : La probabilité de l'intersection de deux évènements est $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$.

Remarque : si $p(B) \neq 0$ alors : $p(A \cap B) = p(B) \times p_B(A)$.

Définition : Deux évènements A et B sont indépendants ssi $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

Conséquence : A et B sont indépendants ssi $p_A(B) = p(B)$ et $p_B(A) = p(A)$.

Propriété 1 : Si A et B sont indépendants alors $\bar{A}$ et B sont aussi indépendants.

Définition : La famille d'évènements $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ forme une partition de l'univers Ω ssi :

- $A_i \cap A_j = \emptyset$, pour tous entiers naturels i et j
- $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$

Exemple : Le couple $(A, \bar{A})$ forme une partition de Ω, quel que soit l'évènement A.

Propriété 2 : Soient la famille d'évènements $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ formant une partition de Ω et un évènement B. Alors $p(B) = p(A_1) \times p_{A_1}(B) + p(A_2) \times p_{A_2}(B) + \cdots + p(A_n) \times p_{A_n}(B)$.

Remarque : Cette propriété est connue sous le nom de formule des probabilités totales.

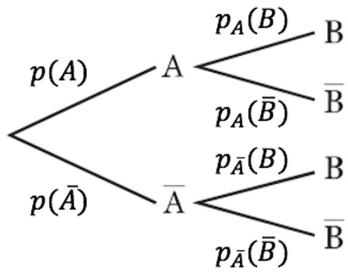
II / LES TABLEAUX

Les tableaux à double entrée permettent une présentation claire de certaines expériences aléatoires et facilitent le calcul des probabilités conditionnelles.

	B	$\bar{B}$	Total
A	$p(A \cap B)$	$p(A \cap \bar{B})$	$p(A)$
$\bar{A}$	$p(\bar{A} \cap B)$	$p(\bar{A} \cap \bar{B})$	$p(\bar{A})$
Total	$p(B)$	$p(\bar{B})$	1

III/ ARBRES PONDÉRÉS

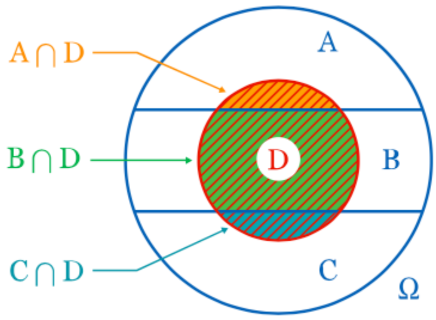
Un arbre pondéré par des probabilités est un schéma mettant en jeu des probabilités conditionnelles et permettant de calculer rapidement des probabilités.

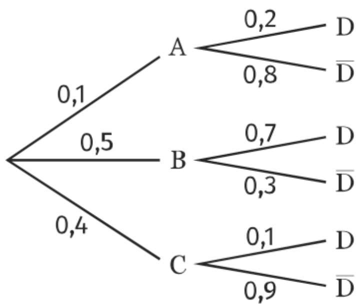


Règles de construction :

- La somme des probabilités des branches issues d'un nœud est égale à 1.
- Le produit des probabilités des évènements rencontrés le long d'un chemin est égal à la probabilité de l'intersection de ces évènements.
- La probabilité d'un évènement est égale à la somme des probabilités des chemins conduisant à cet évènement. (Formule des probabilités totales)

Exemple :





A, B et C forment une partition de Ω :

$$p(D) = p(A) \times p_A(D) + p(B) \times p_B(D) + p(C) \times p_C(D) = 0{,}1 \times 0{,}2 + 0{,}5 \times 0{,}7 + 0{,}4 \times 0{,}1 = 0{,}41$$

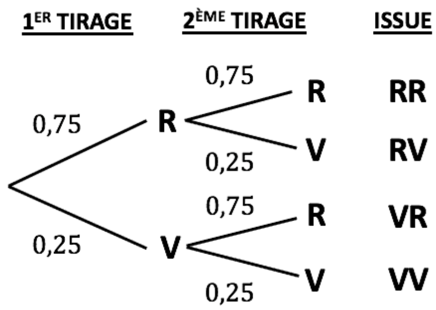
IV / ÉPREUVE ET SCHÉMA DE BERNOUILLI

Définition : Soit p un nombre réel compris entre 0 et 1. Une épreuve de Bernoulli de paramètre p est une expérience aléatoire comportant deux issues : le succès ou l'échec.

Exemple : Lancer une pièce de monnaie en considérant que « pile » est le succès. On sait que $p = 0{,}5$.

Définition : Soit n un entier naturel. Un schéma de Bernoulli est la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

Exemple : Une urne opaque contient trois boules rouges et une boule verte. On prélève au hasard une première boule dont on note la couleur. On la replace dans l'urne puis on prélève une seconde boule dont on note la couleur.



La probabilité de chacune des quatre issues est le produit des probabilités rencontrées sur le chemin qui conduit à cette issue car les deux tirages sont indépendants.

La probabilité de l'issue RV est : $p(RV) = 0{,}75 \times 0{,}25 = 0{,}1875$