# LOGIQUE ET RAISONNEMENTS

Une proposition logique est un énoncé qui est soit vrai, soit faux.

**Exemples :**

- « Un cheval est un mammifère » est une proposition vraie.
- « Paris est la capitale de l'Italie » est une proposition fausse.
- « $x^2 \leq 16$ » est une proposition vraie pour certaines valeurs du nombre réel $x$.

## I / OPÉRATIONS LOGIQUES

Étant données deux propositions P et Q.

**1) Connecteur ET** : La conjonction, notée P et Q, est vraie ssi les propositions P et Q sont vraies toutes les deux.

« Le cheval est un mammifère » et « Le cheval est herbivore » est une proposition vraie.

| P | Q | **P et Q** |
|---|---|---|
| Vraie | Vraie | **Vraie** |
| Vraie | Fausse | **Fausse** |
| Fausse | Vraie | **Fausse** |
| Fausse | Fausse | **Fausse** |

**2) Connecteur OU** : La disjonction, notée P ou Q, est vraie ssi l'une au moins des propositions P et Q est vraie.

« Le cheval est un mammifère » ou « Tous les mammifères sont herbivores » est une proposition vraie.

| P | Q | **P et Q** |
|---|---|---|
| Vraie | Vraie | **Vraie** |
| Vraie | Fausse | **Vraie** |
| Fausse | Vraie | **Vraie** |
| Fausse | Fausse | **Fausse** |

**3) Négation NON** : La négation de P, notée non P, est vraie lorsque P est fausse, et fausse lorsque P est vraie.

La négation de « $x < 7$ » est « $x \geq 7$ ».

| P | **Non P** |
|---|---|
| Vraie | **Fausse** |
| Fausse | **Vraie** |

## II / IMPLICATIONS ET ÉQUIVALENCES

**1) Implication** : « Si P alors Q » est notée P ⇒ Q. P est l'hypothèse et Q est la conclusion. On suppose que P est vrai alors :

- Si Q est vraie alors P ⇒ Q est vrai.
- Si Q est fausse alors P ⇒ Q est fausse.

Si P est fausse alors P ⇒ Q est toujours vraie car on peut déduire ce que l'on veut d'une hypothèse fausse.

| P | Q | **P ⇒ Q** |
|---|---|---|
| Vraie | Vraie | **Vraie** |
| Vraie | Fausse | **Fausse** |
| Fausse | Vraie | **Vraie** |
| Fausse | Fausse | **Vraie** |

**Condition nécessaire, condition suffisante** :
Si l'implication « P ⇒ Q » est vraie
« Si cet animal est cheval, alors c'est un mammifère » est vraie.

- « C'est un mammifère » est une condition nécessaire pour qu'un animal soit un cheval.
- « Cet animal est un cheval » est une condition suffisante pour que cet animal soit un mammifère.

**2) Réciproque** : La réciproque de l'implication P ⇒ Q (Si P alors Q) est l'implication Q ⇒ P (Si Q alors P).

**Exemple** : La réciproque de l'implication « S'il y a un glaçon dans mon verre, alors l'eau refroidit » est l'implication « Si l'eau refroidit alors il y a un glaçon dans mon verre ».

**3) Contraposée** : La contraposée de l'implication P ⇒ Q (Si P alors Q) est l'implication non P ⇒ non Q (Si non P alors non Q). La contraposée de l'implication « Si cet animal est un cheval alors c'est un mammifère » est « Si cet animal n'est pas un mammifère alors ce n'est pas un cheval ».

**Remarque** : une implication et sa contraposée sont soit toutes les deux vraies, soit toutes les deux fausses.

**4) Équivalence** : Une équivalence est la conjonction de deux implications réciproques : « Si P alors Q » et « Si Q alors P ». Elle est notée P ⟺ Q.
On dit aussi : « P si et seulement si Q » ou « P équivaut à Q ».

« ABCD est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales se coupent en leur milieu » est une proposition vraie.

| P | Q | **P ⟺ Q** |
|---|---|---|
| Vraie | Vraie | **Vraie** |
| Vraie | Fausse | **Fausse** |
| Fausse | Vraie | **Fausse** |
| Fausse | Fausse | **Vraie** |

**Condition nécessaire <u>et</u> condition suffisante** : Si l'équivalence « P ⟺ Q » est vraie, alors P est une condition nécessaire ET suffisance pour Q.

**Exemple** : $xy = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $y = 0$. « $xy = 0$ » est une proposition nécessaire et suffisante à la proposition « $x = 0$ ou $y = 0$ ».

## III / QUANTIFICATEURS

**Le quantificateur universel** : « pour tout », « quel que soit ». On l'emploie pour exprimer que tous les éléments d'un ensemble vérifient une certaine propriété.

**Exemple** : Pour tout $x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$

**Le quantificateur existentiel** : « il existe ». On l'emploie pour exprimer qu'un moins un élément d'un ensemble vérifie une certaine propriété.

**Exemple** : Il existe au moins un entier naturel divisible par 2, par 3 et par 5, et qui soit inférieur à 100.
Il en existe même trois : 30, 60 et 90.

## IV / RAISONNEMENTS

On doit démontrer que la proposition P est vraie.

**1) Syllogisme** : On recherche une proposition Q qui soit vraie et telle que la proposition « Q ⇒ P » soit vraie aussi. C'est un raisonnement par implication.

**Exemple** : On veut prouver que (P) : « Socrate est mortel ». On sait que (Q) : « Socrate est un homme » et que « Tous les hommes sont mortels » ou dit autrement « Si un être est un homme alors il est mortel ».

**2) Démonstration par équivalence** :

- On ne sait pas démontrer directement que P est vraie.
- Par contre on sait démontrer que la proposition P' est vraie et que la proposition P $\Leftrightarrow$ P' est vraie.
- Il suffit de démontrer que P' est vraie pour démontrer que P l'est également.

**Exemple** : On veut démontrer que les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires en A. On reformule le problème en : on va démontrer que le théorème de Pythagore s'applique bien au triangle ABC.

**3) Démonstration par disjonction de cas** : On veut démontrer qu'une proposition est vraie pour tous les éléments d'un ensemble. C'est difficile à faire pour tous les éléments. On partitionne (découpe) l'ensemble en plusieurs sous-ensemble parce que la démonstration s'avère plus simple si on démontre la proposition pour chacun sous-ensemble séparément.

**Exemple** : pour démontrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}, n(n+3)$ est pair, on démontre que cette proposition est vraie pour tout $n$ pair puis pour tout $n$ impair.

| | |
|---|---|
| Si $n$ est pair,<br>alors il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2p$.<br>$n(n+3) = 2 \times p(2p+3)$<br>Donc $n(n+3)$ est pair. | Si $n$ est impair,<br>alors il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2p+1$.<br>$n(n+3) = (2p+1) \times (2p+4) = 2 \times (2p+1)(p+2)$<br>Donc $n(n+3)$ est pair. |

**4) Démonstration par contraposée** : Démontrer la proposition « P $\Rightarrow$ Q » peut s'avérer difficile. Alors il faut tenter de démontrer sa proposition contraposée « non Q $\Rightarrow$ non P ». Car une implication et sa contraposée sont soit toutes les deux vraies, soit toutes les deux fausses.

**Exemple** : On doit démontrer la proposition « Si le carré d'un nombre est pair, alors ce nombre est pair ». Il est plus simple de démontrer la contraposée : « Si un nombre est impair, alors son carré est impair ».
Supposons que $n$ est impair, alors il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2p+1$.
Donc $n^2 = (2p+1)^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 2(2p^2 + 2p) + 1$ qui est un nombre impair.

**5) Démonstration par l'absurde** : Pour démontrer qu'une proposition P est vraie, on suppose que P est fausse (c'est-à-dire que « non P » est vraie) et on tente d'en déduire une contradiction.

**Exemple** : Pour démontrer que $\sqrt{2} \neq 1{,}414$, on suppose que $\sqrt{2} = 1{,}414$.
Alors $2 = 1{,}414^2 = 1{,}999396$. Ce qui n'est pas possible.
Notre hypothèse « $\sqrt{2} = 1{,}414$ » nous a conduit à une contradiction. C'est que notre hypothèse était fausse et que son contraire est vrai, à savoir que « $\sqrt{2} \neq 1{,}414$ » est vraie.

**6) Démonstration par un contre-exemple** : On doit démontrer qu'une affirmation est fausse. Alors il suffit de trouver cas particulier qui contredit l'affirmation.

**Exemple** : l'affirmation « Pour tout réel strictement positif $x, \sqrt{x} < x$ » est fausse. Contre-exemple :
$\sqrt{0{,}25} = 0{,}5 > 0{,}25$