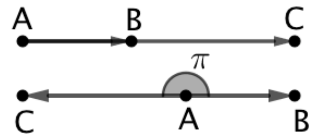
GÉOMÉTRIE VECTORIELLE

I / PRODUIT SCALAIRE

Définition : Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ avec $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Le produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ est le nombre réel $\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$.

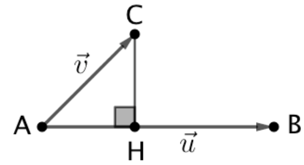
Conséquence : Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Propriétés 1 :



- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de même sens, $\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \times AC$
- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de sens contraire, $\vec{u} \cdot \vec{v} = -AB \times AC$

Propriétés 2 : Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) . Alors :



- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires et de même sens, $\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \times AH$
- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires et de sens contraire, $\vec{u} \cdot \vec{v} = -AB \times AH$
- On peut résumer les deux cas à : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$

Définition : Deux vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux si et seulement si les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

Propriété 3 : Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

Propriété 4 : Étant donnés deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B\,; y_B)$, les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point B sur la droite (OA) sont

$$x_H = \frac{x_A x_B + y_A y_B}{{x_A}^2 + {y_A}^2} \times x_A \qquad y_H = \frac{x_A x_B + y_A y_B}{{x_A}^2 + {y_A}^2} \times y_A$$

Expression analytique du produit scalaire (Propriété 5) : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$

Propriétés 6 : Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \qquad \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \qquad (\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

Propriétés 7 : Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$,

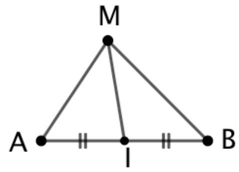
$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 \qquad \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \qquad (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$$

Théorème de Pythagore (Propriété 8) :

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$.

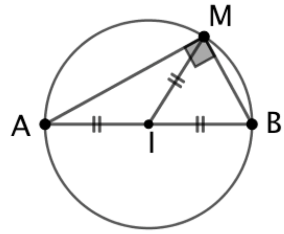
II / APPLICATIONS DU PRODUIT SCALAIRE AU CERCLE ET AU TRIANGLE



Propriété 9 :

Étant donnés trois points A, B et I le milieu de $[AB]$, pour tout point M,

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \left\|\overrightarrow{MI}\right\|^2 - \frac{1}{4}\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2$$



Propriété 10 : Étant donnés deux points distincts A et B

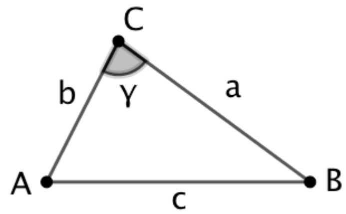
L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.

Remarque : On retrouve la propriété qui dit qu'un triangle inscrit dans un cercle, et dont l'un des côtés est un diamètre de ce cercle, est un triangle rectangle.

Propriété 11 :

Une équation cartésienne du cercle de centre A de coordonnées $(x_A; y_A)$ et de rayon r est

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = r^2.$$



Propriété d'Al-Kashi 12 (Généralisation du théorème de Pythagore) :

Dans un triangle ABC avec les notations du schéma de droite,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

III / APPLICATIONS DU PRODUIT SCALAIRE À LA DROITE

Définition : Un vecteur normal à une droite du plan est un vecteur non nul orthogonal à un vecteur directeur de cette droite.

Propriétés 13 :

- La droite passant par le point A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.
- Deux droites sont perpendiculaires si et seulement si elles admettent des vecteurs normaux orthogonaux.
- Deux droites sont parallèles si et seulement si elles admettent des vecteurs normaux colinéaires.

Propriétés 14 :

- Toute droite ayant pour vecteur normal le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(a; b)$ admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$, où $c \in \mathbb{R}$.
- La droite d'équation $ax + by + c = 0$, où $(a, b) \neq (0,0)$ admet le vecteur de coordonnées $(a; b)$ comme vecteur normal.