

# FONCTION EXPONENTIELLE

## I / INTRODUCTION DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

**Propriété 1 :** S'il existe une fonction  $f$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  telle que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = f(x)$  et telle que  $f(0) = 1$ , alors cette fonction ne s'annule jamais sur  $\mathbb{R}$ .

**Propriété 2 :** Il existe une seule fonction  $f$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  telle que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = f(x)$  et telle que  $f(0) = 1$ .

**Définition :** La fonction vérifiant la propriété 2 est appelée fonction exponentielle et est notée  $\exp$ .

**Conséquences :**  $\exp$  est définie sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\exp'(x) = \exp(x)$   $\exp(0) = 1$ .

**Propriétés 3 :** Pour tout réel  $x$ ,

$$\exp(x) \neq 0 \quad \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$

**Propriétés 4 :** Pour tous réel  $x$  et  $y$ , pour tout entier relatif  $n$

$$\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y) \quad \exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)} \quad \exp(nx) = (\exp(x))^n$$

**Notation :** On note  $\exp(1) = e$ .  $e$  est un nombre irrationnel qui vaut environ 2,718.

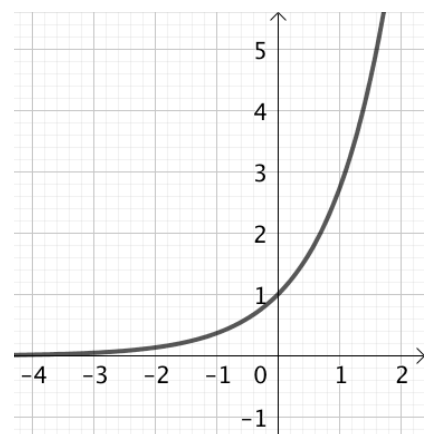
**Conséquence :** Pour tout entier relatif  $n$  :  $\exp(n) = \exp(n \times 1) = (\exp(1))^n = e^n$

Par extension, on convient de noter que  $\exp(x) = e^x$

Avec cette notation, les propriétés précédentes s'écrivent ainsi :

$$(e^x)' = e^x \quad e^0 = 1 \quad e^x \neq 0 \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x} \quad e^{x+y} = e^x e^y \quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \quad e^{nx} = (e^x)^n$$

**Propriété 5 :**  $a$  et  $b$  étant deux nombres réels, la fonction  $f$  définie tout  $x \in \mathbb{R}$  par  $f(x) = e^{ax+b}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $f'(x) = ae^{ax+b}$



## II / ÉTUDE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

**Propriété 6 :** Pour tout réel  $x$ ,  $e^x > 0$

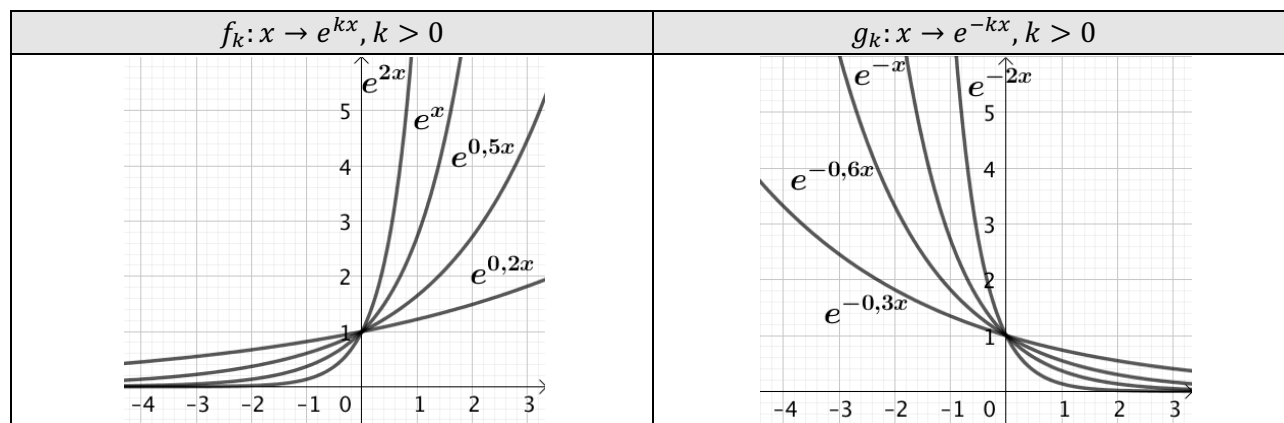
**Propriété 7 :** La fonction exponentielle est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

**Propriété 8 :** On définit une famille de fonction  $f_k$  par  $f_k(x) = e^{kx}$  avec  $k \in \mathbb{R}^*$ .

Compte tenu de la propriété 5, les fonctions  $f_k$  sont définies et dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

- Elles sont strictement croissantes sur  $\mathbb{R}$  si  $k > 0$ .
- Elles sont strictement décroissantes sur  $\mathbb{R}$  si  $k < 0$ .
- Les courbes représentatives des fonctions  $f_k$  passent par le point de coordonnées  $(0 ; 1)$ .

Exemples :



**Remarque :** les courbes représentatives des fonctions  $f_k$  passent toutes par le point de coordonnées  $(0 ; 1)$ .

### III / RÉOLUTION D'ÉQUATIONS ET D'INÉQUATIONS

**Propriété 9 :** Pour tous réels  $a$  et  $b$  :

- $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$
- $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$
- $e^a > e^b \Leftrightarrow a > b$

**Exemple :** Résolution de l'équation  $e^{3x+9} = 1$

$$e^{3x+9} = 1 \Leftrightarrow e^{3x+9} = e^0 \Leftrightarrow 3x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = -3$$