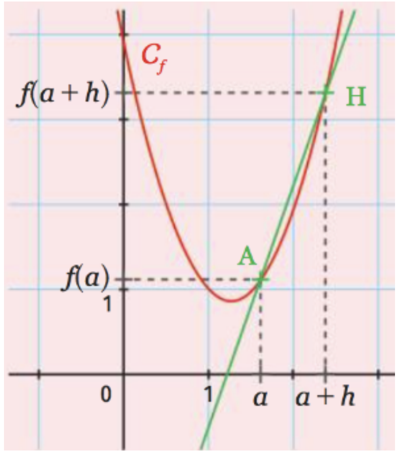
DÉRIVATION ET FONCTIONS DÉRIVÉES

Dans ce chapitre f est une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et on notre $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan. $a \in I$. A est le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a.

I / TAUX DE VARIATION ET NOMBRE DÉRIVÉ



Définition : Soient $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $a + h \in \mathbb{R}$, et H le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse $a + h$. Le taux de variation de f entre a et $a + h$ est

$$\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Propriété 1 : $\tau(h)$ est aussi le coefficient directeur de la droite (AH).

Définition : On dit que f est dérivable en a lorsque $\tau(h)$ tend vers un nombre réel quand h prend des valeurs de plus en plus proches de 0. Ce nombre est le nombre dérivé de f en a et est noté $f'(a)$.

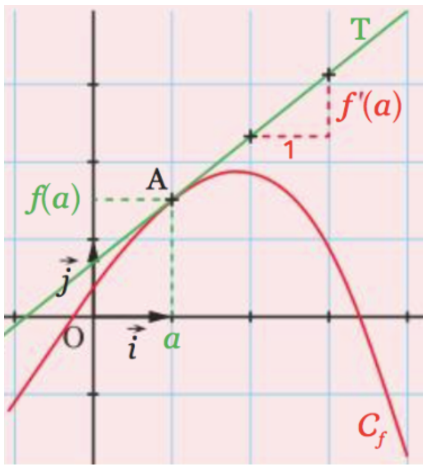
On écrit alors : $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Exemple : $f(x) = x^2$. On recherche le nombre dérivé de f en 2.

$$\tau(h) = \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h} = \frac{4h - h^2}{h} = 4 - h$$

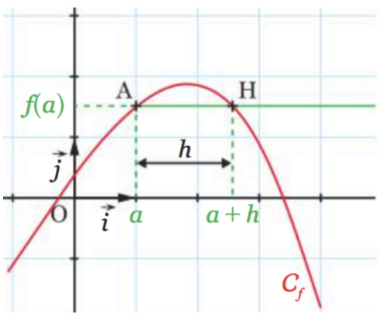
$\lim\limits_{h \to 0} 4 - h = 4$. Par conséquent f est dérivable en 2 et $f'(2) = 4$

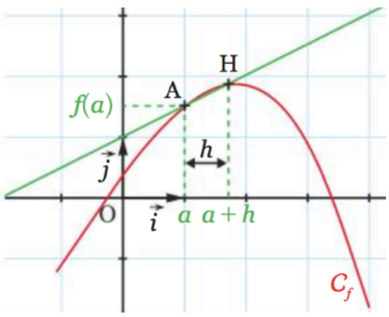
II / TANGENTE À UNE COURBE



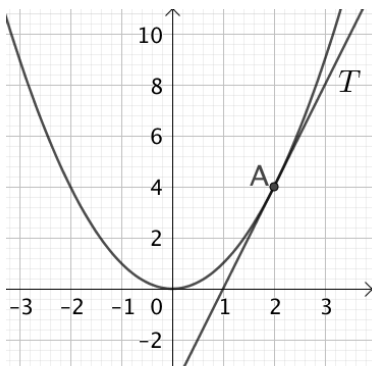
Définition : Lorsque f est dérivable en a, on appelle tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A, la droite T passant par A et dont le coefficient directeur est $f'(a)$.

La tangente en A est la droite limite obtenue lorsqu'on fait tendre H vers A, c'est-à-dire lorsque h tend vers 0.





Propriété 2 : Lorsque f est dérivable en a, l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.



Remarque :
Si $f'(a) = 0$ alors la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

Exemple : $f(x) = x^2$. On a sait que $f'(2) = 4$. Les coordonnées du point A sont $(2\,;4)$. Donc l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A est $y = 4(x-2)+4$, c'est-à-dire $y = 4x-4$.

III / FONCTIONS DÉRIVÉES

Définition : La fonction f est dérivable sur l'intervalle I ssi f est dérivable en tout réel x de I. On appelle fonction dérivée de f la fonction qui à tout réel x de I, associe le réel $f'(x)$. On la note f'.

Exemple : On veut déterminer la fonction dérivée de la fonction carrée. $f(x) = x^2$. On calcule l'expression du taux de variation de f en x :

$$\tau(h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h} = \frac{2hx-h^2}{h} = 2x-h$$

$\lim\limits_{h\to 0} 2x-h = 2x$. Par conséquent f est dérivable en x et $f'(x) = 2x$

Fonctions dérivées des fonctions usuelles

f	Ensemble de définition de f	f'	Ensemble de définition de f'
$f(x) = k$ avec $k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = mx+p$ avec $m, p \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = m$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0;+\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$

Remarque : Toutes les fonctions polynomiales sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

IV / OPERATIONS SUR LES FONCTIONS DÉRIVÉES

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I.

La fonction	Notée	est dérivable sur I et ...
$x \to u(x)+v(x)$	$u+v$	$(u+v)' = u'+v'$
$x \to ku(x)$ avec $k \in \mathbb{R}$	ku	$(ku)' = ku'$
$x \to u(x)v(x)$	uv	$(uv)' = u'v+uv'$
$x \to \left(u(x)\right)^2$	u^2	$(u^2)' = 2uu'$
$x \to \left(u(x)\right)^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	u^n	$(u^n)' = nu^{n-1}u'$
$x \to \frac{1}{v(x)}$ avec $v(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$	$\frac{1}{v}$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$
$x \to \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $v(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$	$\frac{u}{v}$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

Propriété 3 :

Soient a et b deux nombres réels avec $a \neq 0$.
Soient I et J deux l'intervalles tels que pour tout $x \in I, ax+b \in J$.
Soit g une fonction définie et dérivable sur un intervalle J.
Soit f une fonction définie sur I par $f(x) = g(ax+b)$.

Alors f est dérivable sur I
$f'(x) = ag'(ax+b)$

Exemple : Soit la fonction f définie sur $I = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$ par $f(x) = \sqrt{2x-1}$. On considère g la fonction racine carré définie sur $J = [0; +\infty[$. On observe que $f(x) = g(2x-1)$. Par ailleurs si $x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$ alors $2x - 1 \in [0; +\infty[$. g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Par conséquent f est dérivable sur I et $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$.

V / SIGNE DE LA DÉRIVÉE ET SENS DE VARIATION

Propriété 4 : Soit la fonction f est dérivable sur l'intervalle I.

- f est croissante sur I si et seulement si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.
- f est décroissante sur I si et seulement si $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$.
- f est constante sur I si et seulement si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$.

Remarque : Si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$ et ne s'annule que pour un nombre fini de valeurs de x, on en conclut que f est strictement croissante sur I. Même type de remarque si $f'(x) \leq 0$.

VI / EXTREMUM LOCAL D'UNE FONCTION

Définitions : Soit un réel $c \in I$.

- $f(c)$ est un minimum local de f s'il existe un intervalle ouvert $J \subset I$ tel que $c \in J$ et tel que pour tout $x \in J, f(x) \geq f(c)$.
- $f(c)$ est un maximum local de f s'il existe un intervalle ouvert $J \subset I$ tel que $c \in J$ et tel que pour tout $x \in J, f(x) \leq f(c)$.

Vocabulaire : on parle d'extremum local pour désigner un minimum ou un maximum local.

Propriété 5 : Soit la fonction f est dérivable sur l'intervalle I et un réel $c \in I$.
Si $f(c)$ est un extremum local de f alors $f'(c) = 0$.

➔ **Attention** : La réciproque est fausse. Exemple : la dérivée de la fonction cube s'annule en 0 mais elle ne possède pas d'extremum.

Propriété 6 : Soit la fonction f est dérivable sur l'intervalle I et un réel $c \in I$.
Si $f'(c) = 0$ et si f' change de signe en c alors $f(c)$ est un extremum local de f.

Exemple : la fonction carré définie par $f(x) = x^2$.
Elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2x$.
$f'(0) = 0$ et f' change de signe en 0. La fonction carré a un minimum en 0.
La tangente au point $(0; 0)$ est horizontale.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$