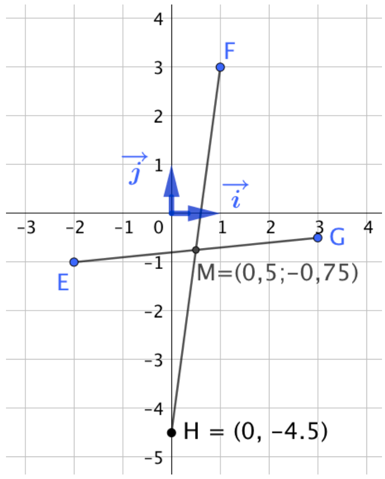
ÉVALUATION n°7 **8 janvier 2020** **2^{nde} 5**

Pour les deux exercices suivants, on suppose l'existence d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. L'usage de la calculatrice est autorisé.

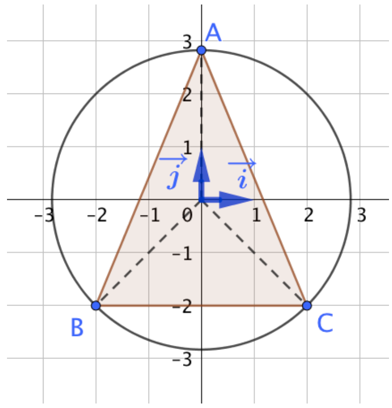


Exercice n°1 (7 points) **:** Soient les points $E(-2\,;-1), F(1\,;3), G(3\,;-0{,}5)$.

1. Déterminer les coordonnées du point H tel que EFGH est un parallélogramme.
   EFGH est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$.
   L'abscisse de $\overrightarrow{EF}$ est $1-(-2)=3$. L'ordonnée de $\overrightarrow{EF}$ est $3-(-1)=4$. Soient x et y les coordonnées de H. L'abscisse de $\overrightarrow{HG}$ est $3-x$. L'ordonnée de $\overrightarrow{HG}$ est $-0{,}5-y$. Puisque $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$, on a les équations : $3-x=3$ et $-0{,}5-y=4$. La résolution de ces deux équations donne : $x=0$ et $y=-4{,}5$.

2. Calculer les longueurs des diagonales de EFGH.
   La longueur de la diagonale EG est $\|\overrightarrow{EG}\|$. On calcule les coordonnées de $\overrightarrow{EG}$: $3-(-2)=5$ et $-0{,}5-(-1)=0{,}5$. Donc $\|\overrightarrow{EG}\| = \sqrt{5^2+0{,}5^2} = \sqrt{25{,}25} \approx 5{,}02$.
   La longueur de la diagonale FH est $\|\overrightarrow{FH}\|$. On calcule les coordonnées de $\overrightarrow{FH}$: $0-1=-1$ et $-4{,}5-3=-7{,}5$. Donc $\|\overrightarrow{FH}\| = \sqrt{(-1)^2+(-7{,}5)^2} = \sqrt{57{,}25} \approx 7{,}57$.

3. Trouver les coordonnées du point d'intersection des diagonales.
   EFGH est un parallélogramme donc ses diagonales se coupent en leur milieu. On peut calculer le milieu de [EG] ou le milieu de [FH]. L'abscisse du milieu de [EG] est $\frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2}$. L'ordonnée du milieu de [EG] est $\frac{-1-0{,}5}{2} = -\frac{1{,}5}{.2}$.
   On peut vérifier en calculant les coordonnées du milieu de [FH]. L'abscisse du milieu de [FH] est $\frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$. L'ordonnée du milieu de [FH] est $\frac{3-4{,}5}{2} = -\frac{1{,}5}{.2}$.



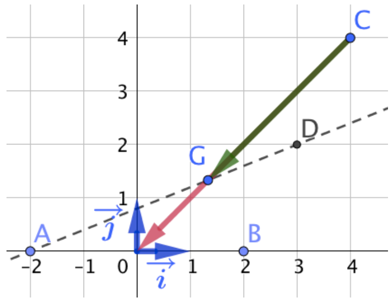
Exercice n°2 (6 points) **:** Soient les points $A(0\,;2\sqrt{2}), B(-2\,;-2), C(2\,;-2)$.

1. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.
   Le triangle ABC est isocèle en A. Il suffit de vérifier que $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\|$.
   $$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-2-0)^2+(-2-2\sqrt{2})^2} = \sqrt{4+4+8\sqrt{2}+8}$$
   $$= \sqrt{16+8\sqrt{2}} \approx 5{,}23$$
   $$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(2-0)^2+(-2-2\sqrt{2})^2} = \sqrt{4+4+8\sqrt{2}+8}$$
   $$= \sqrt{16+8\sqrt{2}} \approx 5{,}23$$
   $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\|$ donc le triangle ABC est isocèle en A.

2. En comparant les distances OA, OB et OC, montrer que O est le centre du cercle passant par A, B et C.
   $$OA = \|\overrightarrow{OA}\| = \sqrt{(0)^2+(2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{2}$$
   $$OB = \|\overrightarrow{OB}\| = \sqrt{(-2)^2+(-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$OC = \|\overrightarrow{OA}\| = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Donc OA = OB = OC, ce qui prouve que les points A, B et C appartiennent à un même cercle de centre O et de rayon $2\sqrt{2}$.



Exercice n°3 (7 points) **:** On considère les points $A(-2\,;0), B(2\,;0), C(4\,;4)$.
On notre D le milieu de [BC].

1. Déterminer les coordonnées du point G telles que $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CO}$.

   Les coordonnées de $\overrightarrow{CO}$ sont $(-4\,;-4)$ puisque les coordonnées de $\overrightarrow{OC}$ sont celles de $C(4\,;4)$. Donc les coordonnées de $\overrightarrow{CG}$ sont $\left(-\frac{8}{3}\,;-\frac{8}{3}\right)$. Soient x et y les coordonnées de G. Alors les coordonnées de $\overrightarrow{CG}$ sont aussi $(x-4\,;y-4)$. Ce qui nous amène à résoudre deux équations : $x - 4 = -\frac{8}{3}$ et $y - 4 = -\frac{8}{3}$. Ce qui nous donne : $x = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3} = y$. Les coordonnées de G sont $\left(\frac{4}{3}\,;\frac{4}{3}\right)$.

2. Montrer que les points A, G et D sont alignés.

   Il suffit de vérifier que le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AD}$ est nul. Les coordonnées de $\overrightarrow{AG}$ sont $\frac{4}{3} - (-2)$ et $\frac{4}{3} - 0$, soit $\left(\frac{10}{3}\,;\frac{4}{3}\right)$. Les coordonnées de D sont $\frac{2+4}{2} = 3$ et $\frac{0+4}{2} = 2$. Donc les coordonnées de $\overrightarrow{AD}$ sont $3 - (-2)$ et $2 - 0$, soit $(5\,;2)$. Le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AD}$ est $\frac{10}{3} \times 2 - \frac{4}{3} \times 5 = \frac{20}{3} - \frac{20}{3} = 0$. Puisque ce déterminant est nul, les deux vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires, ce qui permet d'affirmer que les points A, G et D sont alignés.

3. Démontrer que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

   $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{AD}$.
   Les coordonnées de $\overrightarrow{GA}$ sont $\left(-\frac{10}{3}\,;-\frac{4}{3}\right)$, donc celles de $3\overrightarrow{GA}$ sont $(-10\,;-4)$. Les coordonnées de $\overrightarrow{AD}$ sont $(5\,;2)$ donc celles de $2\overrightarrow{AD}$ sont $(10\,;4)$. On en conclut que $3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{AD} = \vec{0}$, soit $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

   Autre solution : calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GC}$ et faire la somme.